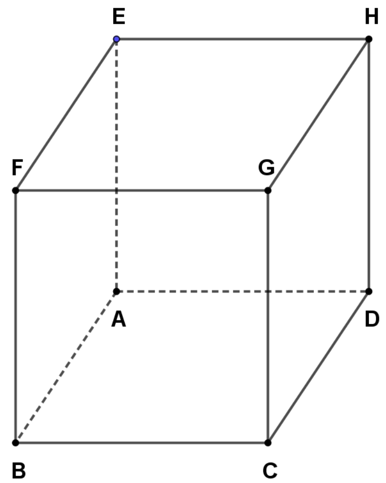
Exercice 2 — 5 points

Dans un triangle non équilatéral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants :
- *le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle)*
- *le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle*
- *l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle.*

Le but de cet exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.
On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.



L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].

1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, G, I et J.

2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).

2.b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2.c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $S\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(0;-1;1)$ est normal au plan ABG.
3.b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABG).
3.c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ est : $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Montrer que cette droite (d) coupe le plan (ABG) en un point L de coordonnées $L\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3.d. Montrer que le point L est équidistant des points A, B et G.

4. Montrer que le triangle ABG est rectangle en B.

5.a. Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABG (aucune justification n'est attendue).
5.b. Vérifier par le calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

CORRECTION

1. $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $G(1;1;1)$ $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

2.a. (AJ) est la droite passant par $A(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc (AJ) : $\begin{cases}x=\lambda\\y=\frac{1}{2}\lambda\\z=\frac{1}{2}\lambda\end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$.

2.b. (IG) est la droite passant par $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$ donc (IG) : $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\y=t\\z=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

2.c. Pour déterminer l'intersection des droites (AJ) et (IG), on résout le système :

$$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\\frac{1}{2}\lambda=t\\\frac{1}{2}\lambda=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda=1+t\\\lambda=2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4t=1+t\\\lambda=2t\end{cases}\quad\text{donc}\quad t=\frac{1}{3}\quad\text{et}\quad\lambda=\frac{2}{3}$$

et $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $\quad y=\frac{1}{3}$ $\quad z=\frac{1}{3}$.

Les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en $S\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABG) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\times1-1\times0+1\times0=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AG}=0\times1-1\times1+1\times1=0$

$\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (ABG).

3.b. Une équation cartésienne de (ABG) est : $0\times x-1\times y+1\times z+d=0$

$A\in(ABG)$ donc $d=0$

$(ABG):\ -y+z=0$

3.c. On résout le système : $\begin{cases}-y+z=0\\x=\frac{1}{2}\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$ on obtient : $t+1+t=0\quad\Leftrightarrow\quad t=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad y=\frac{1}{2}$ $\quad z=\frac{1}{2}$

Le plan (ABG) et la droite (d) sont sécants en $L\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Remarque : L est le milieu de [AG].

$AL^2=\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2\left(\frac{1}{2}-0\right)^2=\frac{3}{4}$ $\quad AL=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$BL^2=\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2=\frac{3}{4}$ $\quad BL=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$GL^2=\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=\frac{3}{4}$ $\quad GL=\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $AL=BL=GL$

4. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BG}=-1\times0+0\times1+1\times0=0$

Le triangle ABG est rectangle B.

5.a. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABG est L.
Le centre de gravité du triangle ABG est S.
L'orthocentre du triangle ABG rectangle en B est B.

5.b. $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BS}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BS}$ sont colinéaires donc les points B, L et S sont alignés.
Remarque :
La droite d'Euler du triangle ABG est la médiane du triangle ABG issue de B.
(rappel : S est le milieu de [AG]).