

Exercice 3

4,75 points

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions.

Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte.

Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question exactement une case parmi les quatre.

Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes questions à ce QCM.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X et donner les paramètres de cette loi.
2. Quelle est la probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses ?
Arrondir le résultat à 10^{-4} près.
3. Donner l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.
On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.
 - 4.a. Calculer $P(Y=10)$, on donnera la valeur exacte du résultat.
 - 4.b. À partir de combien de bonnes réponses la note finale de Dominique est-elle positive ? Justifier.
 - 4.c. Calculer $P(Y \leq 0)$, on donnera une valeur approchée au centième.
 - 4.d. Montrer que $Y = 1,5X - 5$.
 - 4.e. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y .

CORRECTION

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

Dominique répond à une question du QCM

Succès : « la réponse est la réponse exacte » la probabilité de succès est $p = \frac{1}{4}$.

Dominique répond au hasard aux dix questions du QCM.

On effectue dix épreuves indépendantes.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{4}$.

2. $P(X=5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0,0584$.

3. $E(X) = np = 10 \times 0,25 = 2,5$

Si Dominique répond plusieurs fois (un nombre assez important) aux 10 questions du QCM au hasard alors il obtiendra en moyenne 2,5 points.

4.a. $\{Y=10\} = \{X=10\}$

$$P(Y=10) = P(X=10) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

- 4.b. La note finale augmente avec le nombre de bonnes réponses.

0 bonne réponse donc 10 mauvaises, note finale : $-0,5 \times 10 = -5$

1 bonne réponse donc 9 mauvaises, note finale : $1 \times 1 - 0,5 \times 9 = -3,5$

2 bonnes réponses donc 8 mauvaises, note finale : $1 \times 2 - 0,5 \times 8 = -2$

3 bonnes réponses donc 7 mauvaises, note finale : $1 \times 3 - 0,5 \times 7 = -0,5$

4 bonnes réponses donc 6 mauvaises, note finale : $1 \times 4 - 0,5 \times 6 = 1$

À partir de 4 bonnes réponses la note finale est positive.

4.c. $P(Y \leq 0) = P(X \leq 3) \approx 0,78$

- 4.d. Pour la note finale Y , il y a X bonnes réponses et $10-X$ mauvaises
donc $Y = 1 \times X - 0,5 \times (10 - X) = 1,5X - 5$

4.e. $E(Y) = 1,5 \times E(X) - 5 = 1,5 \times 2,5 - 5 = -1,25$