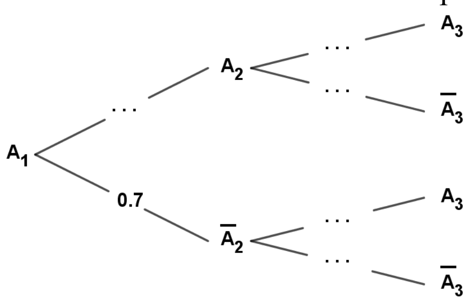
Exercice 4 — 5,25 points

Soit n un entier naturel non nul.
Dans le cadre d'une expérience aléaatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n .
Pour les parties A et B de l'exercice, on considère que :.
. Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité de 0,3.
. Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité de 0,7.
On suppose que $p_1=1$.

Partie A :

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre de probabilités, ci-dessous :

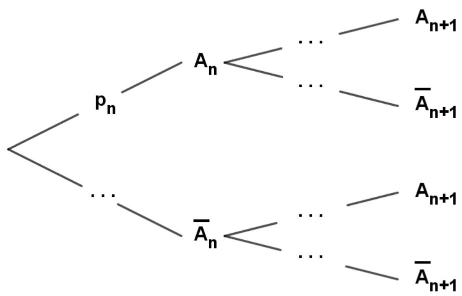


2. Montrer que $p_3=0{,}58$

3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B :

Dans cette partie, on étudie (p_n) avec $n\geqslant 1$.
1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2.a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1}=-0{,}4\,p_n+0{,}7$.
On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=p_n-0{,}5$.
2.b. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .
2.c. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
2.d. Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Partie C :

Soit $x\in]0;1[$, on suppose que $P_{\bar{A}_n}=P_{A_n}(\bar{A}_{n+1})=x$.
On rappelle que $p_1=1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
$p_{n+1}=(1-2x)p_n+x$.

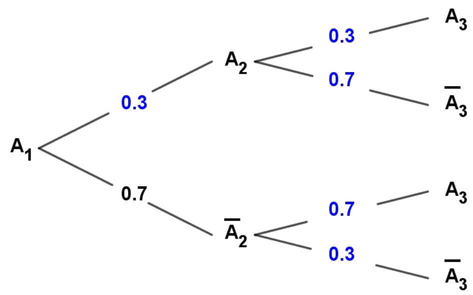
2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :
$p_n=\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1}+\frac{1}{2}$.

3. Montrer que la suite (p_n) est convergente et donner sa limite.

CORRECTION

Partie A

1.



2. En utilisant la formule des probabilités totales :

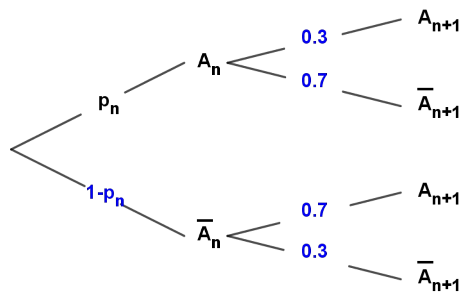
$p_3=P(A_3)=P(A_2\cap A_3)+P(\bar{A}_2\cap A_3)=P(A_2)\times P_{A_2}(A_3)+P(\bar{A}_2)\times P_{\bar{A}_2}(A_3)$

$p_3=0,3\times 0,3+0,7\times 0,7=0,9+0,49=0,58$

3. $P_{A_3}(A_2)=\dfrac{P(A_2\cap A_3)}{P(A_3)}=\dfrac{0,09}{0,58}=\dfrac{9}{58}\simeq 0,16$

Partie B

1.



2.a. $p_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n\cap A_{n+1})+P(\bar{A}_n\cap A_{n+1})=P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(\bar{A}_n)\times P(\bar{A}_n)\times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$

$p_{n+1}=p_n\times 0,3+(1-p_n)\times 0,7=-0,4\,p_n+0,7$

2.b. Pour tut entier naturel n non nul.

$u_n=p_n-0,5 \quad \Leftrightarrow \quad p_n=u_n+0,5$

Or $u_{n+1}=p_{n+1}-0,5=-0,4\,p_n+0,7-0,5=-0,4\times(u_n+0,5)+0,-0,4\,u_n-0,2+0,2=-0,4\,u_n$

(u_n) est la suite géométrique de raison $q=-0,4$ et de premier terme $u_1=p_1-0,5=0,5$.

2.c. Pour tout entier naturel non nul n :

$u_n=u_1\times q^{n-1}=0,5\times(-0,4)^{n-1}$

$p_n=u_n+0,5=0,5\times(-0,4)^{n-1}+0,5$

2.d. $-1< -0,4 <1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty}(-0,4)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=0,5$.

Partie C

1. $p_{n++1}=P(A_n\cap A_{n+1})+P(\bar{A}_n\cap A_{n+1})=P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(\bar{A}_n)\times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$

$P_{A_n}(A_{n+1})=1-P_{A_n}(\bar{A}_{n+1})=1-x$

$P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})=x$

$p_{n+1}=p_n\times(1-x)+(1-p_n)\times x=p_n-x\,p_n+x-x\,p_n$

$p_{n+1}=(1-2x)\,p_n+x$

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on ait : $p_n=\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1}+\frac{1}{2}$.

Initialisation

Pour $n=1$ $p_1=1$ et $\frac{1}{2}(1-2x)^0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}=1$.

Donc la propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel non nul n, on suppose que : $p_n=\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1}+\frac{1}{2}$ et on doit démontrer que $p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-2x)^n+\frac{1}{2}$.

Si $p_n=\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1}+\frac{1}{2}$ alors $p_{n+1}=(1-2x)p_n+x=(1-2x)\left[\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1}+\frac{}{2}\right]+x$

$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-2x)^n+\frac{1}{2}(1-2x)+x=\frac{1}{2}(1-2x)^n+\frac{1}{2}-x+x=\frac{1}{2}(1-2x)^n+\frac{1}{2}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $p_n=\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1}+\frac{1}{2}$.

3. $0< x <1 \Leftrightarrow 0 > -2x > -2 \Leftrightarrow 1 > 1-2x > -1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2x)^{n-1}=0$

et la suite (p_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\frac{1}{2}$.

