Exercice 1 — 6 points

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes.

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre service où le client scanne lui-même ses articles.
Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être :
- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.
Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.
Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.
Un contrôle est déclenché à une caisse automatique .

On considère les évènements suivants :
- T : « Le contrôle est un contrôle total » ;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\bar{T}$ et $\bar{E}$ les évènements contraires de T et E.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P(\bar{T}\cap E)$.

2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.

3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée.
On donnera la valeur arrondie au centième.

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p=0{,}165$.
La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées.
On donnera la valeur arrondie au centième.

3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée.
On donnera la valeur arrondie au centième.

4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.
Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.
On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20;0{,}165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.

2. On définit la variable aléatoire S par $S=X_1+X_2+X_3$.
Justifier que $E(S)=9{,}9$ et que $V(S)=8{,}2665$.
Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.
À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

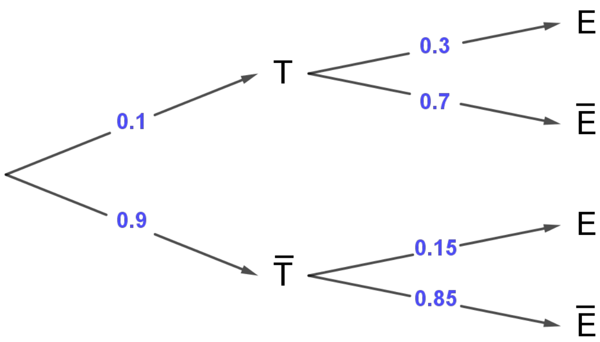
1. L'énoncé précise :

$P(T)=\frac{1}{10}=0,1$ $\quad$ $P(\bar{T})=1-0,1=0,9$

$P_T(E)=\frac{30}{100}=0,3$ $\quad$ $P_T(\bar{E})=1-0,3=0,7$

$P_{\bar{T}}(\bar{E})=\frac{85}{100}=0,85$ $\quad$ $P_{\bar{T}}(E)1-085=0,15$

On obtient l'arbre pondéré suivant



$P(\bar{T}\cap E)=P(\bar{T})\times P_{\bar{T}}(E)=0,9\times 0,15=0,135$

2. En utilisant la formule des probabilités totales

$P(E)=P(T\cap E)+P(\bar{T}\cap E)$

$P(T\cap E)=P(T)\times P_T(E)=0,1\times 0,3=0,03$

$P(E)=0,03+0,135=0,165$

3. On nous demande de calculer : $P_E(T)=\frac{P(T\cap E)}{P(E)}$

$P_E(T)=\frac{0,03}{0,165}=0,18$ à 10^{-2} près

Partie B

1. $n=15$ et $p=0,165$ sont les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

2. $P(X=5)=\binom{15}{5}\times 0,165^5\times 0,835^{10}$

En utilisant la calculatrice : $P(X=5)=0,06$ à 10^{-2} près.

3. Soit A l'évènement : « au moins une erreur soit détectée ».

$\bar{A}$: « aucune erreur soit détectée » $\quad P(\bar{A})=0,835^{15}$

et $P(A)=1-0,835^{15}=0,93$ à 10^{-2} près.

4. n est un entier naturel non nul.

La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée en n contrôles est $1-0,835^n$.

On veut avoir : $1-0,835^n>0,99 \quad\Leftrightarrow\quad 1-0,99>0,835^n \quad\Leftrightarrow\quad 0,01>0,835^n$

$\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow\quad \ln(0,01)>\ln(0,835^n) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(0,01)>n\times\ln(0,835)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$0<0{,}835<1$ donc $\ln(0{,}835)<0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}835)}<n$

En utilisant la calculatrice $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}835)}=25{,}54$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad 26\leqslant n$

Il faut effectuer au moins 26 contrôles dans la journée pour que la probabilité d'avoir au moins une erreur soit supérieure à 0,99.

Partie C

1. $E(X_1)=np=20\times 0{,}165=3{,}3$

$V(X_1)=npq=20\times 0{,}165\times 0{,}835=2{,}7555$

2. Les variables aléatoires $X_1;X_2$ et X_3 suivent la loi $\mathscr{B}(20;0{,}165)$.

$E(S)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=3E(X_1)=3\times 3{,}3=9{,}9$

X_1, X_2 et X_3 sont aussi indépendantes donc :

$V(S)=V(X_1+X_2+X_3)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)=3\times 2{,}7655=8{,}2655$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne pour $t>0$:

$P(|S-E(S)|\geqslant t)\leqslant \frac{V(S)}{t^2}$

Pour $E(S)=10$ et $t=4$

$P(|S-10|\geqslant 4)\leqslant \frac{8{,}2655}{16}\simeq 0{,}52$ à 10^{-2} près.

Et $P(|S-10|<4)=1-P(|S-10|\geqslant 4)\geqslant 1-0{,}52=0{,}48$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés