

Exercice 3

6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par $f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1; +\infty[$.

- Déterminer la limite de la fonction f en -1 .
- Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1; +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$.
- Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2; 6,5]$.
- On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2; 6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2.364$	6.5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2.265$	$h(6.5)$

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2; 6,5]$.

- On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```

from math import*

def f(x):
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n):
    p=1/10**n
    x=6
    while f(x)-x>0
        x=x+p
    return (x-p,x)
    
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande $\log(x)$ renvoie la valeur $\ln x$;
- la commande $c**d$ renvoie la valeur de c^d .

- Donner les valeurs renvoyées par la commande $\text{bornes}(2)$.
On donnera les valeurs arrondies au centième.
- Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$

2. En déduire que la suite (u_n) vers une limite L .
3. On rappelle que le réel α défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x)=0$ sur l'intervalle $[2;6,5]$.
Justifier que $L=\alpha$.

CORRECTION

Partie A

1. x appartient à l'intervalle $] -1 ; +\infty [$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1} 4 \ln(x+1) = -\infty$$

$$\text{de plus} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{-x^2}{25} \right) = \frac{-1}{25} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty .$$

2. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction qui a x de I associe $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{x^2}{25} \right)' = \frac{2x}{25}$$

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)}$$

$$3. \quad T(x) = -2x^2 - 2x + 100 \quad \Delta = 4 + 800 = 804 = 4 \times 201$$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{201}}{-4} = \frac{-1 - \sqrt{201}}{2} < -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{201}}{-4} = \frac{-1\sqrt{201}}{2} \approx 6,58 > 6,5$$

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	$+\infty$
$T(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Sur l'intervalle $] -1 ; 6,5 [$ le signe de $f'(x)$ est le signe de $T(x)$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $] -1 ; 6,5 [$.

4. $h(2) \approx 2,23$

h est strictement croissante sur $[2; m]$

donc pour tout x appartenant à $[2; m]$ $h(x) \geq 2,23$ et l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[2; m]$.

• $h(6,5) \approx -0,130 < 0$

h est continue et strictement décroissante sur $[m; 6,5]$, à valeurs dans $[h(6,5); h(m)]$, 0 appartient à cet intervalle le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[m; 6,5]$.

• conséquence :

L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant $[2; 6,5]$.

5.a. Les valeurs renvoyées par la commande bornes(2) sont : 6,36 et 6,37 .

On obtient ces valeurs, soit en exécutant le programme Python, soit en utilisant un tableur ou soit en utilisant une calculatrice par balayage ;

$$\text{On obtient : } h(6,3) \approx 0,064 \quad h(6,4) \approx -0,0325$$

$$h(6,36) \approx 0,006 \quad h(6,37) \approx -0,003$$

5.b. On a : $6,36 < \alpha < 6,37$

On obtient un encadrement de α au centième près.

Partie B

1. $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5 .$$

Initialisation

$$u_0 = 2 \quad u_1 = f(2) = 4 \ln(3) - \frac{4}{25} \simeq 4,23$$

$$\text{donc } 2 \leq u_0 \leq u_1 < 6,5$$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$ et on doit démontrer que $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,5$.

f est strictement croissante sur $] -1; 6,5]$ donc si $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$ alors $f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(6,5)$.

Or $f(2) \simeq 4,3 \geq 2$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(6,5) \simeq 6,37 < 6,5$

donc $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,5$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq u_n \leq u_{n+2} < 6,5$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante et $u_n < 6,5$ donc la suite (u_n) est majorée par 6,5.

Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

et $L \in [2; 6,5]$

3. f est continue sur $[2; 6,5]$ et pour tout entier naturel n , $f(u_n) = u_{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$

donc $f(L) = L$ soit $h(L) = L$.

α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2; 6,5]$.

On obtient $L = \alpha$.