

Exercice 4
4 points
Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.

Montrer que h est solution de l'équation différentielle (E_1) .

2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30000 bactéries dans le milieu.

On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimée en heure.

On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation (E_2) : $p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$.

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. On admet réciproquement que, si y est solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1) , alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2) .

Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + K e^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K .

4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60000 individus. On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

CORRECTION

Partie A

$$(E_1): y' + 0,48y = \frac{1}{250}$$

1. $t \in [0; +\infty[\quad h(t) = \frac{1}{120} \quad h'(t) = 0$

$$h'(t) + 0,48h(t) = 0 + \frac{0,48}{120} = \frac{48}{12000} = \frac{1}{250}$$

donc h est solution de l'équation différentielle (E_1) .

2. Si a est un nombre réel donné, les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions f_C définie sur \mathbb{R} par $f_C(t) = Ce^{-at}$ (où C est une constante réelle).

Pour l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$, $a = 0,48$ et les solutions de l'équation différentielle sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions f_C définie sur $[0; +\infty[$ par $f_C(t) = Ce^{-0,48t}$ (C est une constante réelle).

3. Pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $h'(t) + 0,48y(t) = \frac{1}{250}$ donc

$$\text{donc } y'(t) + 0,48y(t) = \frac{1}{250} \Leftrightarrow y'(t) + 0,48y(t) = h'(t) + 0,48h(t)$$

$$\Leftrightarrow y'(t) - h'(t) + 0,48y(t) - 0,48h(t) = 0 \Leftrightarrow (y-h)'(t) + 0,48(y-h)(t) = 0$$

$$\text{donc } (y-h)(t) = Ce^{-0,48t} \quad (C \text{ constante réelle}) \Leftrightarrow y(t) = Ce^{-0,48t} + h(t) \quad (C \text{ constante réelle})$$

$$\Leftrightarrow y(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120} \quad (C \text{ constante réelle}).$$

Partie B

1. $p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$ et $p = \frac{1}{y} \quad t \in [0; +\infty[\quad p(t) = \frac{1}{y(t)} \quad y(t) > 0 \quad y(t) = \frac{1}{p(t)}$

$$p(t) > 0 \text{ et } p \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[\text{ donc } y \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[\text{ et } p'(t) = \frac{-y'(t)}{y^2(t)}.$$

$$p'(t) = \frac{1}{250}p(t) \times (120 - p(t)) \Leftrightarrow \frac{-y'(t)}{y^2(t)} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y(t)} \times \left(120 - \frac{1}{y(t)}\right)$$

$$-y'(t) = \frac{1}{250} \times 1 \times (120y(t) - 1) \Leftrightarrow y'(t) = -\frac{120}{250}y(t) + \frac{1}{250} \Leftrightarrow y'(t) + 0,48y(t) = \frac{1}{250}$$

Si p est solution de (E_2) alors y est solution de (E_1) .

2. $y(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ (C constante réelle) $\Leftrightarrow 120y(t) = 120Ce^{-0,48t} + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{120y(t)} = \frac{1}{120Ce^{-0,48t} + 1} \Leftrightarrow \frac{p(t)}{120} = \frac{1}{120Ce^{-0,48t} + 1} \Leftrightarrow p(t) = \frac{120}{Ke^{-0,48t} + 1} \text{ avec } K = 3C$$

3. $p(0) = 0$ donc $30 = \frac{120}{K+1} \Leftrightarrow K+1 = \frac{120}{30} = 4 \Leftrightarrow K = 3$

$$p(t) = \frac{120}{3e^{-0,48t} + 1}$$

4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,48t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0$

On obtient : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}} = 120.$

À très long terme, le nombre de bactéries sera voisin de 120000.

5. On veut déterminer les valeurs de t telle que $p(t) \geq 60$.

$$p(t) \geq 60 \Leftrightarrow \frac{120}{1+3e^{-0,48t}} \geq 60 \Leftrightarrow 120 \geq 60(1+3e^{-0,48t})$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 1+3e^{-0,48t} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq e^{-0,48t}$$

\ln est une fonction croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right) \geq \ln(e^{-0,48t}) \Leftrightarrow -\ln(3) \geq -0,48t \Leftrightarrow \frac{\ln(3)}{0,48} \leq t$$

$\frac{\ln(3)}{0,48} \simeq 2,289$ donc t doit être supérieur ou égal à 2,289 h soit $2,289 \times 60 = 137,34$ min

Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60000 individu est 2h17min.