Exercice 1 — 6 points

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.
Au 1er janvier 2025, on introduit 6000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.
On suppose que dans ce milieu , l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=6$ et de raison 0,93.
Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année 2025 + n exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.
On suppose que dans ce milieu , l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par : $v_0=6$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=-0,05v_n^2+1,1v_n$.
Pour tout entier naturel n , v_n représente la population au 1er janvier de l'année 2025 + n exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=-0,05x^2+1,1x$.

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;11]$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $2\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant 6$.

4. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite L.

5.a. Justifier que la limite L vérifie $f(L)=L$ puis en déduire la valeur de L.
5.b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3000 individus.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3000 individus.

3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera celle du milieu A.

4. On considère le programme Python ci-dessous.

```
n=0
u=6
v=6
while . . . :
   u= . . .
   v= . . .
   n=n+1
print(2025+n)
```

4.a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.

4.b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

CORRECTION

Partie A

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=6$ et de raison $q=0{,}93$.

1. u_1 est la population (en milliers d'individus) au 1er janvier 2026.
$u_1=6\times 0{,}93=5{,}58$ (milliers d'individus).
Au 1er janvier 2026 il y aura 5580 individus dans le milieu A.

2. Pour tout entier naturel n : $u_n=u_0\times q^n=6\times 0{,}93^n$.

3. $0<0{,}93<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}93^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
À long terme, il n'y aura plus aucun animal dans le milieu A.

Partie B

(v_n) est la suite définie par : $v_0=6$ et pour tout entier naturel n $v_{n+1}=-0{,}05\,v_n^2+1{,}1\,v_n$.

1. v_1 est la population en milliers d'individus) au 1er janvier 2026.
$v_1=-0{,}05\times 6^2+1{,}1\times 6=-0{,}05\times 36+6{,}6=-1{,}8+6{,}6=4{,}8$ (milliers d'individus)
Au 1er janvier 2026 il y aura 4800 individus dans le milieu B.

2. x est un réel positif ou nul, $f(x)=-0{,}05\,x^2+1{,}1\,x$.
f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
$f'(x)=-0{,}1\,x+1{,}1$

$-0{,}1\,x+1{,}1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{1{,}1}{0{,}1}=11$

$-0{,}1\,x+1{,}1>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1{,}1>0{,}1\,x \quad\Leftrightarrow\quad 11>x$

$-0{,}5\,x+1{,}1<0 \quad\Leftrightarrow\quad 11<x$

donc f est croissante sur [0;11].

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$2\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant 6$.

Initialisation
$v_0=6$ et $v_1=4{,}8$ donc $2\leqslant v_1\leqslant v_0\leqslant 6$;
La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $2\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant 6$ et on doit démontrer que : $2\leqslant v_{n+2}\leqslant v_{n+1}\leqslant 6$.
f est croissante sur [0;11].
Si $2\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant 6$ alors $f(2)\leqslant f(v_{n+1})\leqslant f(v_n)\leqslant f(6)$.
$f(2)=-0{,}05\times 4+2{,}2=2$ $\quad f(v_{n+1})=v_{n+2}$ $\quad f(v_n)=v_{n+1}$ $\quad f(6)=-0{,}05\times 6^2+6{,}6=4{,}8\leqslant 6$
donc $2\leqslant v_{n+2}\leqslant v_{n+1}\leqslant 6$.

Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $2\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant 6$.

4. Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}\leqslant v_n$ et $2\leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2 et la suite (v_n) est convergente.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=L$ (remarque : $2\leqslant L\leqslant 6$).

5.a. Pour tout entier naturel n, on a : $f(v_n)=v_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1}=L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=L$ et f est continue sur $[0;+\infty[$ donc $f(L)=L$.

L est donc une solution de l'équation $f(x)=x$ appartenant à [2;6].

$f(x)=x \quad\Leftrightarrow\quad -0{,}05x^2+1{,}1x=x \quad\Leftrightarrow\quad -0{,}05x^2+0{,}1x=0 \quad\Leftrightarrow\quad -0{,}5x^2+x=0$

$\Leftrightarrow\quad x(-0{,}5x+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\ x=0 \text{ ou } x=2\ )$

donc L=2 .

5.b. Dans le milieu B, à très long terme le nombre d'individus sera voisin de 2000.

Partie C

1. On doit déterminer les valeurs de n pour lesquelles $u_n<3 \quad\Leftrightarrow\quad 6\times0{,}93^n<3 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}93^n<\frac{3}{6}=0{,}5$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow\quad \ln(0{,}93^n)<\ln(0{,}5) \quad\Leftrightarrow\quad n\times\ln(0{,}93)<\ln(0{,}5)$

$0<0{,}93<1$ donc $\ln(0{,}93)<0$

$\Leftrightarrow\quad n>\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}93)}\simeq9{,}55$

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow\quad n\geqslant10$

La population du milieu A sera strictement inférieure à 3000 individus à partir de l'année : $2025+10=2035$.

2. En utilisant la calculatrice en calculant les premiers termes ou en utilisant un tableur, on obtient :

$v_1=4{,}8 \qquad v_2=4{,}128 \qquad v_3\simeq3{,}6888 \qquad v_4\simeq3{,}3773 \qquad v_5\simeq3{,}1447 \qquad v_6\simeq2{,}9647<3$.

La population du milieu B sera strictement inférieure à 3000 individus à partir de l'année : 2025+6=2031.

3. La suite (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ alors à partir d'un certain rang N tout les termes de rang $N\leqslant n$ on a $u_n<2$ or pour tout entier naturel n, on a : $2\leqslant v_n$.

Pour tout les termes de la suite (u_n) de rang $n\geqslant N$,on a $u_n<v_n$; au bout de N années la population du milieu B dépassera celle du milieu A.

4.a.

```
n=0
u=6
v=6
while u>=v:
  u= 0.93*u
  v= -0.05*v**2+1.1v
  n=n+1
print(2025+n)
```

5.b. Si on utilise le tableur :

$u_{12}\simeq2{,}4064 < v_{12}\simeq2{,}5116$

$u_{13}\simeq2{,}3575 > v_{13}\simeq2{,}3358$

donc la valeur affichée sera : 2025+13=2038.