

Exercice 2

6 points

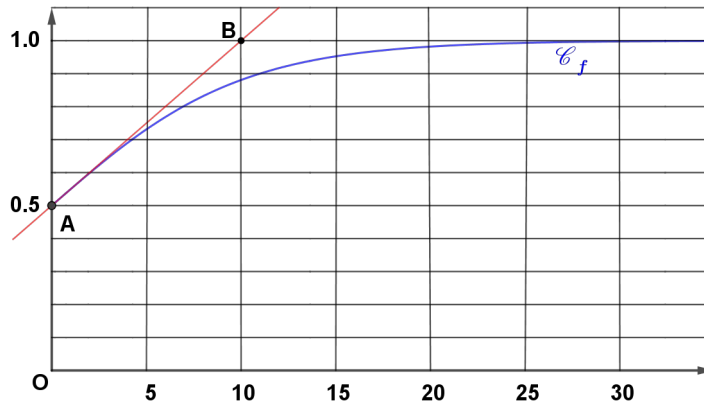
Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

La fonction f admet pour représentation graphique la courbe \mathcal{C}_f ci-dessous :



On considère les points $A(0; 0,5)$ et $B(10; 1)$

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A ;

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) .
- 5.a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b .
- 5.b. En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 40]$, c'est à dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} dx .$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

CORRECTION

Partie A

x appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$.

1. Par lecture graphique (on détermine l'ordonnée du point de \mathcal{C}_f d'abscisse 10) $f(10) = 8,8$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

3. $A(0; 0,5)$ est un point de \mathcal{C}_f donc $f(0) = 0,5$.

Or $f(0) = \frac{1}{a + e^0} = \frac{1}{1+a} = 0,5 \Leftrightarrow 1 = 0,5 \times (1+a) \Leftrightarrow 1 = 0,5 + 0,5a \Leftrightarrow 0,5 = 0,5a \Leftrightarrow a = 1$.

4. $A(0; 0,5)$ et $B(10; 1)$ donc $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10} = \frac{1}{20} = 0,05$ est le coefficient directeur de la droite (AB).

5.a. $(a + e^{-bx})' = -be^{-bx}$ $f'(x) = \frac{-(-be^{-bx})}{(1 + e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$

5.b. $f'(0) = \frac{b}{(1+1)^2} = \frac{b}{4}$ est le coefficient directeur de la droite (AB)

$\frac{b}{4} = 0,05 \Leftrightarrow b = 4 \times 0,05 = 0,2$.

Partie B

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,2x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1$.

2. $f'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2} > 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

3. f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, à valeurs dans $[0; 1[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que tout nombre réel de $[0; 1[$ admet un unique antécédent par f appartenant à $[0; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α appartenant à $[0; +\infty[$.

Graphiquement on peut conclure que : $15 < \alpha < 20$.

On vérifie avec la calculatrice

$f(15) \simeq 0,9526 < 0,97$ $f(20) \simeq 0,9820 > 0,97$

Puis on calcule :

$f(17) \simeq 0,9677 < 0,97$ $f(18) \simeq 0,9734 > 0,97$

donc $17 < \alpha < 18$

Pour tout entier $x \geq 18$ on a $f(x) > 0,97$.

Partie C

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$f(x) = \frac{1}{1 + e^{0,2x}} = \frac{1 \times e^{0,2x}}{(1 + e^{-0,2x}) \times e^{0,2x}} = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}$

$$2. \quad u(x) = 1 + e^{0,2x} \quad u'(x) = 0,2e^{0,2x}$$
$$f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}} = \frac{1}{0,2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} = 5 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

donc la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = 5 \ln(u(x)) = 5 \ln(1 + e^{0,2x})$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

$$3. \quad \int_0^{40} f(x) dx = [F(x)]_0^{40} = F(40) - F(0) = 5 \ln(1 + e^8) - 5 \ln(2).$$

I est la valeur moyenne de f sur $[0; 40]$.

$$I = \frac{1}{40} \times (5 \ln(1 + e^8) - 5 \ln(2)) \simeq 0,913.$$