Exercice 3 4 points

Le codage « base64 » utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant les 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules les chiffres de 0 à 9 et deux autre caractères spéciaux.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.

2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les caractères sont différents deux à deux.

3.a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule.
3.b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
3.c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
3.d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre . On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale . Déterminer ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis.
On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.
On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.
On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie dans la partie B.
On note $S=X_1+X_2+X_3+X_4$
Déterminer,en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

CORRECTION

Partie A

1. Le nombre de séquences possibles est : $64^4=16777216$.

2. Pour le 1^{er} caractère il y a 64 possibilités.
Pour le $2^{ème}$ caractère il y a 63 possibilités.
Pour le $3^{ème}$ caractère il y a 62 possibilités.
Pour le $4^{ème}$ caractère il y a 61 possibilités.
Le nombre de séquences si l'on impose que les quatre caractères sont différents deux à deux est :
$64\times63\times62\times61=15249024$.

3.a. Pour obtenir une séquence ne comportant pas la lettre A majuscule, il faut choisir les caractères parmi les 63 caractères distincts de la lettre A majuscule.
Le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule est : $63^4=15752961$.

3.b. Le nombre de séquences ne comportant pas au moins une lettre A majuscule est :
$64^4-63^4=1024255$.

3.c. Le nombre de séquences comportant exactement une lettre A majuscule est égale à 4 fois (car il y a 4 possibilités de places dans la séquence) le nombre de séquences constituées pour un des caractères la lettre A majuscules et pour les 3 autres 63^3 possibilités.
On obtient : $4\times63^3=1000188$.

3.d. Il y a $\binom{4}{2}$ possibilités de placer les 2 lettres A majuscule parmi les 4 places d'une séquence.
$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4+3}{2}=6$.
Le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule est :
$6\times1\times1\times63^2=23814$

Partie B

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n=250$ et $p=0{,}01$.

2. On nous demande de calculer $P(X=0)$.
$P(X=0)=\binom{250}{0}\times0{,}01^0\times(1-0{,}01)^{250}=0{,}99^{250}\simeq0{,}081$.

3. $P(X>16)=P(X\geqslant17)$ en utilisant la calculatrice $P(X\geqslant17)\simeq1{,}037\times10^{-9}$.
Ce qui est peut-être considéré comme négligeable.

Partie C

$E(X)=E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=E(X_4)=np=250\times0{,}01=2{,}5$
$E(S)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)=4\times2{,}5=10$
$V(X)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+V(X_4)=npq=2{,}5\times0{,}99=2{,}475$
Les variables aléatoires X_1; X_2; X_3 et X_4 sont indépendantes donc
$V(S)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+V(X_4)=4\times2{,}475=9{,}9$