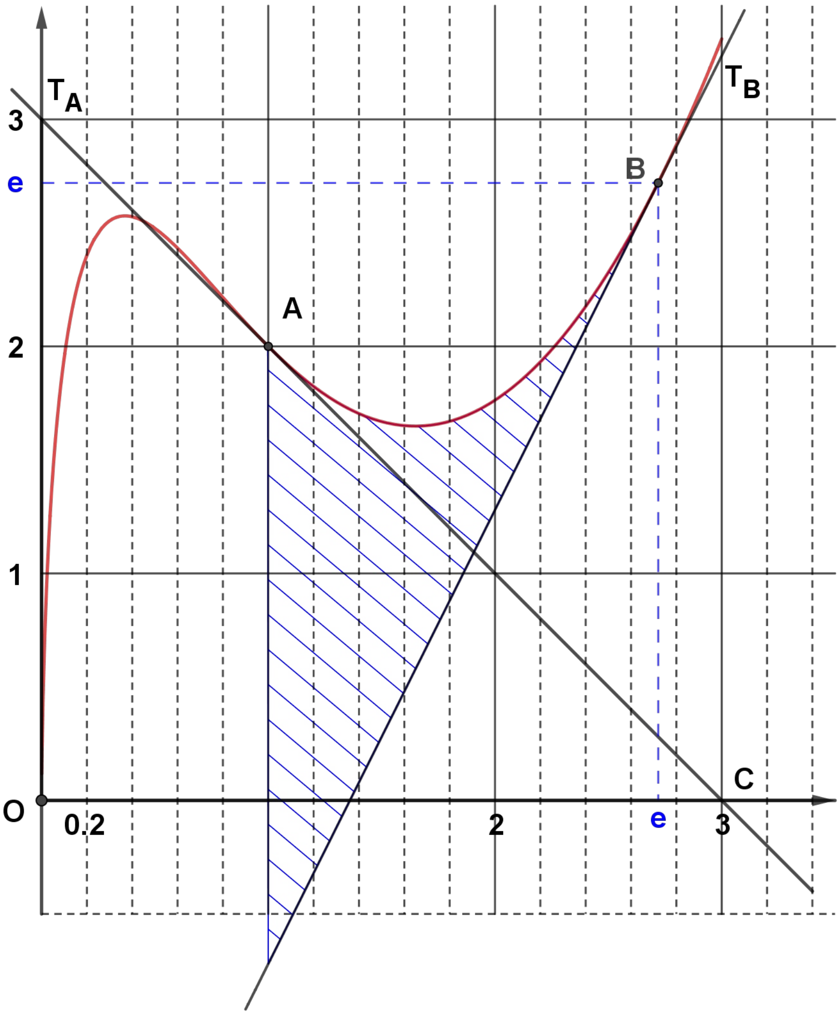
Exercice 2 — 6 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]0\,;3]$;
- la droite T_A tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;2)$;
- la droite T_B tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $C(3;0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

2. Combien de solutions l'équation $f'(x)=0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\,;3]$?

3. Quel est le signe de $f''(0{,}2)$?

Partie B : Étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\left[2(\ln x)^2-3\ln x+2\right]$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2-3X+2=0$.
En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)=2(\ln x)^2+\ln x-1$.

3.a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f''(x)=\frac{1}{x}(4\ln x+1)$.

3.b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

3.c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y=2x-e$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{e^2+1}{4}$$

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine haché sur la figure, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ la tangente T_A, et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.
On admet que $\int_1^e x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}$.
En déduire la valeur de $\mathscr{A}$ en unité d'aire.

CORRECTION

Partie A : Lectures graphiques

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la droite T_A qui est la droite (AC) A(1;3) C(3;1).
$f'(1)=-1$.

2. La fonction f est strictement croissante, puis strictement décroissante, puis strictement croissante sur l'intervalle $]0;3]$. f' est positive, puis négative, puis positive et f' est continue car dérivable sur l'intervalle $]0;3]$ donc f' s'annule deux fois sur $]0;3]$ et l'équation $f'(x)=0$ admet 2 solutions sur $]0;3]$.

3. La fonction f est concave sur $]0;0,25[$ donc $f''(0,2)<0$ et $f''(0,2)$ est du signe - .

Partie B : Étude de la fonction f
x appartient à $]0;+\infty[$ $\quad f(x)=x[2(\ln x)^2-3\ln x+2]$

1. $2X^2-3X+2=0 \qquad \Delta=(-3)^2-4\times 2\times 2=9-16=-7<0$
L'équation $2X^2-3X+2=0$ n'admet pas de solution réelle.
$x\in]0;+\infty[$ donc $f(x)=0 \iff 2(\ln x)^2-3\ln x+2=0 \iff \begin{cases} X=\ln x \\ 2X^2-3X+2=0 \end{cases}$
donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]0;+\infty[$ et $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. $f(x)=x[2(\ln x)^2-3\ln x+2]$
Si $x>1$ alors $2(\ln x)^2-3\ln x+2=\ln x\left(2\ln x-3+\dfrac{2}{\ln x}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\ln x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2(\ln x)^2-3\ln x+2)=+\infty$
On obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3.a. On admet que $f'(x)=2(\ln x)^2+\ln x-1$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ et $[(\ln x)^2]'=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x$
donc $f''(x)=2\times\left(2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x\right)+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{x}\ln x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}(4\ln x+1)$

3.b. Le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de $4\ln x+1$.
$4\ln x+1=0 \iff \ln x=-\dfrac{1}{4} \iff x=e^{-\frac{1}{4}}=e^{-0,25}$
$4\ln x+1>0 \iff \ln x>-\dfrac{1}{4} \iff x>e^{-0,25}$
$4\ln x+1<0 \iff \ln x<-\dfrac{1}{4} \iff x<e^{-0,25}$

x	0		$e^{-0.25}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

f est concave sur $]0;e^{-0,25}[$ et f est convexe sur $]e^{-0,25};+\infty[$.
Le point d'abscisse $e^{-0,25}$ de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion.

3.c. $e^{-0,25} \simeq 0,779 < 1$ donc f est convexe sur $]1+\infty[$ et $\mathscr{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes sur $]1;+\infty[$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T_B .

Partie C : calcul d'aire

1. $f'(x)=2(\ln x)^2+\ln x-1$

$f'(e)=2\times 1^2+1-1=2$

Le coefficient directeur de T_B est égal à 2. T_B: $y=2x+b$

$B(e;e)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et à T_B donc $e=2e+b \iff b=-e$

T_B: $y=2x-e$

2. $\int_1^e x\ln x\,dx$

$u(x)=\ln x \quad u'(x)=\dfrac{1}{x} \qquad v'(x)=x \quad v(x)=\dfrac{x^2}{2}$

u et v sont dérivables sur [1;e] et u' et v' sont continues sur [1;e].
En utilisant la formule d'intégration par parties.

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{e^2}{2}\times 1-\frac{1^2}{2}\times 0 - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4} .$$

3. Sur $[1;+\infty[$ $\mathscr{C}_f$ est dessus de T_B donc l'aire (en unité d'aire)du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_B, et les droites d'équation x=1 et x=e est $\mathscr{A}=\int_1^e (f(x)-2x+e)\,dx$.

$$\mathscr{A}=\int_1^e (2(x\ln x)^2-3x\ln x+2x-2x+e)\,dx = 2\int_1^e (x\ln x)^2\,dx - 3\int_1^e x\ln x\,dx + \int_1^e e\,dx$$

$$\mathscr{A}=2\times\left(\frac{e^2-1}{4}\right)-3\times\left(\frac{e^2+1}{4}\right)+[ex]_1^e = \frac{2e^2-2}{4}-\frac{3e^2+3}{4}+e^2-e$$

$$\mathscr{A}=\frac{3e^2-4e-5}{4} \text{ U.A.}$$

