Exercice 3 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse, justifier chaque réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1;0;5)$ et $B(3;2;-1)$

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x=3-2t \\ y=2-t \\ z=-1+3t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

. la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x=15+k \\ y=8-k \\ z=-6+2k \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

. la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+4s \\ y=2+4s \\ z=1-6s \end{cases}$ avec $s\in\mathbb{R}$

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+z+1=0$.
Affirmation 4 : La distance du point $C(2;-1;2)$ au plan $\mathscr{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

$A(-1;0;5)$ et $B(3;2:1)$ $\quad d: \begin{cases} x=3-2t \\ y=2-t \\ z=-1+3t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Pour $t=0$ $B\in d$ pour $t=2$ $A\in d$ donc $d=(AB)$.

Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires donc $\vec{n}$ est normal au plan (OAB) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{OA}=5\times(-1)+(-2)\times0+1\times5=-5+5=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{OB}=5\times3+(-2)\times2+5\times(-1)=15-4=6\neq0$

donc $\vec{n}$ n'est pas normal au plan (OAB).

Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d $\quad \vec{u'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d'.

Il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{u'}=\lambda\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires et les droites d et d' ne sont pas parallèles.

On veut alors déterminer l'intersection des droites d et d'.

On considère le système $\begin{cases} 15+k=1+4s & (1) \\ 8-k=2+4s & (2) \\ -6+2k=1-6s & (3) \end{cases}$

Pour (1) et (2) on obtient $\begin{cases} k-4s=-14 \\ -k-4s=-6 \end{cases}$ $\quad -8s=-20 \Leftrightarrow s=\frac{5}{2}$ $\quad 2k=-8 \Leftrightarrow k=-4$

pour l'équation (3) $-6+2k=-6-8=-14$ et $1-6s=1-15=-14$

donc les droites d et d' sont sécantes en I(11;12 ;-14) et les droites d et d' sont coplanaires.

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

La distance du point C au plan $\mathscr{P}$ est CH où H est le projeté orthogonal de C sur $\mathscr{P}$.

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

δ est la droite passant par $C(2;-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{N}$.

$\delta: \begin{cases} x=r+2 \\ y=-r-1 \\ z=r+2 \end{cases}$ $r\in\mathbb{R}$ $\quad \mathscr{P}: x-y+z+1=0$

On détermine les coordonnées du point H intersection de δ et $\mathscr{P}$.

On résout : $(r+2)-(-r-1)+(r+2)+1=0 \Leftrightarrow 3r+6=0 \Leftrightarrow r=-2$

$H(0;1;0)$

$HC^2=(2-0)^2+(-1-1)^2+(2)^2=4+4+4=12$

$CH=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$