Exercice 4 — 5 points

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles. La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au 1er juillet de l'année 2024+n. Ainsi, $u_0=1$.
Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir .que pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=-0{,}02\,u_n^2+1{,}3\,u_n$.

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

2. On note h définie sur [0;20] par : $h(x)=-0{,}02\,x^2+1{,}3\,x$.
On admet que h est croissante sur [0;20].

2.a. Démontrer que pour entier n, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$.

2.b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

2.c. Justifier que L=15.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

3.a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

3.b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
  n=0
  u=1
  while . . . . . :
    n= . . . .
    u= . . . . .
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par posidonie au cours du temps avec un modèle continu.
Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$ vérifiant :

. $f(0)=1$;
. f ne s'annule pas sur $[0;+\infty$;
. f est dérivable sur $[0;+\infty[$;
. f est solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_1): $y'=0{,}02\,y(15-y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une exprression.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{1}{f(t)}$

Montrer que g est solution de l'équation différentielle
(E_2): $y'=-0{,}3\,y+0{,}02$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. En déduire que pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f(t)=\dfrac{15}{14e^{-0,3t}+1}$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0;+\infty[$ l'inéquation $f(t)>14$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A : étude d'un modèle discret

1. $u_1=-0,02\times u_0^2-1,3\times u_0=-0,02+1,3=1,28$
La posidonie devrait recouvrir 1,28 ha au 1[er] juillet 2025.

2. $x\in[0;20]$ $h(x)=-0,02x^2+1,3x$
h est croissante sur [0;20].

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$.

Initialisation
Pour n=0, $u_0=1$ et $u_1=1,28$ donc $1\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 20$.
La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n, on suppose que $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$ et on doit démontrer que $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 20$.
Si $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$ alors $h(1)\leqslant h(u_n)\leqslant h(u_{n+1})\leqslant h(20)$ car h est croissante sur [0;20].
$h(1)=1,28\geqslant 1$, $h(u_n)=u_{n+1}$, $h(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $h(20)=-0,02\times 20^2+1,3\times 20=-8+26=18\leqslant 20$
donc $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 20$.

Conclusion
Le principe de récurrence permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$.

2.b. Pour tout entier naturel, on a $u_n\leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante d'une part, et d'autre part $u_n\leqslant 20$ donc la suite (u_n) est majorée par 20.
Toute suite croissante et majorée est convergente.
Donc la suite (u_n) converge. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n=L$.

2.c. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=h(u_n)$
$u_{n+1}=-0,02\,u_n^2+1,3\,u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n=L$ et $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}=L$
Donc $L=-0,02L^2+1,3L \Leftrightarrow 0,02L^2-0,3L=0 \Leftrightarrow L(0,02L-0,3)=0$
$\Leftrightarrow \left(L=0 \text{ ou } L=\dfrac{0,3}{0,02}=\dfrac{30}{2}=15\right)$
Or pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n$ donc $1\leqslant L$ et $L=15$.

3.a. $\lim_{n\to+\infty} u_n=15$ (u_n) est une suite croissante et $u_0=1$ donc il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0}>14$ et si $n\geqslant n_0$ alors $u_n\geqslant u_{n_0}>14$.
Au premier juillet $2024+n_0$ la la posidonie recouvra plus de 1 ha.

3.b.

```
def seuil():
  n=0
  u=1
  while u<=14:
    n= n+1
    u= -0.02*u**2+1.3*u
  return n
```

Remarque : si on exécute le programme on obtient : 18
Au 1[er] juillet 2024+18=2042, la posidonie recouvrira plus de 14 ha.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel t de $[0;+\infty[$ alors $g'(t)=\frac{-f'(t)}{(f(t))^2}$

or f est solution de (E_1) donc pour tout réel t de $[0;+\infty[$ on a : $f'(t)=0{,}02\,f(t)(15-f(t))$

donc $g'(t)=-0{,}02\left(\frac{15}{f(t)}-1\right)=-\frac{0{,}3}{f(t)}+0{,}02=-0{,}3\,g(t)+0{,}02$.

g est donc solution de l'équation différentielle (E_2): $y'=-0{,}3\,y+0{,}02$.

2. Si a est un réel non nul et b est un réel, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=a\,y+b$ et l'ensemble des fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par $g_k(t)=k\,e^{at}-\frac{b}{a}$ où k est une constante réelle.

Pour (E_2) $g_k(t)=k\,e^{-0{,}3t}+\frac{0{,}02}{0{,}3}=k\,e^{-0{,}3t}+\frac{1}{15}=\frac{15\,k\,e^{-0{,}3t}+1}{15}$.

3. Il faut déterminer la valeur de k telle que $f(t)=\frac{1}{g_k(t)}=\frac{15}{15\,k\,e^{-0{,}3t}+1}$

$f(0)=1 \Leftrightarrow \frac{15}{15k+1}=1 \Leftrightarrow 15=15k+1 \Leftrightarrow 15k=14 \Leftrightarrow k=\frac{14}{15}$

$f(t)=\frac{15}{14\,e^{-0{,}3t}+1}$

4. $\lim_{t\to\infty}(-0{,}3t)=-\infty$ et $\lim_{T\to-\infty} e^{T}=0$ donc $\lim_{t\to+\infty} e^{-0{,}3t}=0$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t)=\frac{15}{1}=15$

5. $t\in[0;+\infty[$

$f(t)>14 \Leftrightarrow \frac{15}{14e^{-0{,}3t}+1}>14 \Leftrightarrow 15>14^2e^{-0{,}3t}+14 \Leftrightarrow 1>14^2e^{-0{,}3t} \Leftrightarrow \frac{1}{14^2}>e^{-0{,}3t}$

$\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{14^2}\right)>-0{,}3t \Leftrightarrow -2\ln(14)>-0{,}3t \Leftrightarrow \frac{2}{0{,}3}\ln(14)<t$

$\frac{2}{0{,}3}\ln(14)\simeq 17{,}59$

On obtient que la posidonie recouvra plus de 14 ha au bout 17,59 années.

$365\times\frac{59}{100}=215{,}35$

2024+17=2041 (1er juillet)

31+31+30+31+30+31=184 jours en 2041

184+31=215

la posidonie recouvra plus de 14 ha au 1er février 2042.