Exercice 1 — 5 points

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.
Dans cet exercice on s'intéresse à des personnes venues séjourner dans un centre multi-sports au cours du week-end.
Le résultats des probabilités demandées seront arrondis au millième si nécessaire.

Partie A

Le centre propose aux personnes venues pour un week-end une formule d'initiation composée de deux séances de cours.
On choisit au hasard une personne parmi celles ayant souscrit à cette formule.
On désigne par A et B les évènements suivants :
- A : « La personne chute pendant la première séance » ;
- B : « La personne chute pendant la deuxième séance ».

Pour un évènement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\bar{E}$ son évènement contraire.
Des observations permettent d'admettre que $P(A)=0{,}6$.
De plus on constate :
- Si la personne chute pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de 0,3.
- Si la personne ne chute pas pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de 0,4.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ et interpréter le résultat.

3. Montrer que $P(B)=0{,}34$.

4. La personne ne chute pas pendant la deuxième séance de cours.
Calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté lors de la première séance.

5. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, associe le nombre d'entre elles n'ayant chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.
On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.
On admet que la probabilité qu'une personne ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de 0,24.

5.a. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

5.b. Quelle est la probabilité d'avoir, dans l'échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, au moins 20 personnes qui ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance ?

5.a. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On choisit au hasard une personne venu un week-end au centre multi-sports. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total aux activités sportives pendant la journée du dimanche.
On admet que :
- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1)=40$ et d'écart type $\sigma=10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2)=60$ et d'écart-type $\sigma=16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès aux activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T=T_1+T_2$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multi-sports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à $0{,}77$.

CORRECTION

Partie A

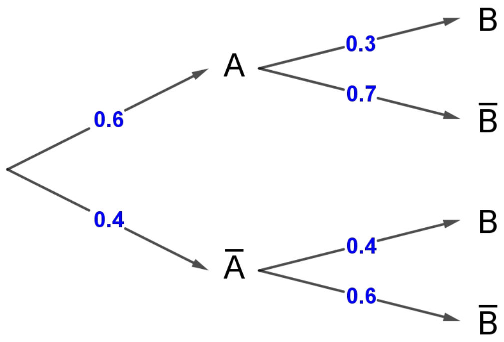
1. L'énoncé précise :

$P(A)=0{,}6$ donc $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}6=0{,}4$

$P_A(B)=0{,}3$ donc $P_A(\bar{B})=1-P_A(B)=1-0{,}3=0{,}7$

$P_{\bar{A}}(B)=0{,}4$ donc $P_{\bar{A}}(\bar{B})=1-P_{\bar{A}}(\bar{B})=1-0{,}4=0{,}6$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(\bar{B})=0{,}4\times 0{,}6=0{,}24$

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)=0{,}6\times 0{,}3+04\times 0{,}4$

$P(B)=0{,}18+0{,}16=0{,}34$

4. On nos demande de calculer : $P_{\bar{B}}(\bar{A})$

$P(\bar{A}\cap\bar{B})=0{,}24$ et $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}34=0{,}66$

$$P_{\bar{B}}(\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0{,}24}{0{,}66}=\frac{4}{11}\simeq 0{,}364$$

5.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

On choisit une personne au hasard dans l'échantillon de 100 personnes.

Succès : S « la personne ne chute pas à la première séance et à la deuxième séance ».

Le choix des 100 personnes est assimilé à un tirage avec remise donc les tirages sont indépendants.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 100 épreuves donc la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}24$.

5.b. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$P(X\geqslant 20)=0{,}855$

5.c. $E(X)=np=100\times 0{,}24=24$

Partie B

1. $E(T)=E(T_1+T_2)=E(T_1)+E(T_2)=40+60=100$

2. T_1 et T_2 sont indépendantes donc :

$V(T)=V(T_1+T_2)=V(T_1)+V(T_2)$

$V(T_1)=(\sigma(T_1))^2=10^2=100$

$V(T_2)=(\sigma(T_2))^2=16^2=256$

$V(T)=100+256=356$

3. $60<T<140 \quad \Leftrightarrow \quad 60-100<T-100<140-100 \quad \Leftrightarrow \quad -40<T-E(T)<40 \quad \Leftrightarrow \quad |T-E(T)|<40$

Rappel :

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev , nous donne :

Si t est un réel strictement positif alors $P(|T-E(T)|\geqslant t)\leqslant\dfrac{V(T)}{t^2}$

Pour $t=40$ $\quad P(|T-E(T)|\geqslant 40)\leqslant\dfrac{356}{40^2}$

$\dfrac{356}{40^2}=0{,}2225$

Pour l'évènement contraire : $P(|T-E(T)|<40)\geqslant 1-0{,}2225=0{,}7775>0{,}77$