Exercice 1 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère :

- les points $A(-1;2;1)$, $B(1;-1;2)$ et $C(1;1;1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par : $d : \begin{cases} x=\frac{3}{2}+2t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$;
- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par : $d' : \begin{cases} x=s \\ y=\frac{3}{2}+s \\ z=3-2s \end{cases}$ $s\in\mathbb{R}$.

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2};1;4\right)$.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+2y+4z-7=0$;

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

4.a. Démontrer que le point $H(-1;0;2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

4.b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM<\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$.
On a donc $\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0;1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.

2. Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

CORRECTION

Partie A

1. Pour déterminer l'intersection des droites d et d', on résout le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}+2t=s \\ 2+t=\frac{3}{2}+s \\ 3-t=3-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4s=s \\ 4+2t=3+2s \\ 3-t=3-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t-2s=-3 & (1) \\ 2t-2s=-1 & (2) \\ -t+2s=0 & (3) \end{cases}$$

On connsidère le système constitué des équations (1) et (2) et on obtient :

$$2t=-2 \Leftrightarrow t=-1 \quad \text{et} \quad 2s=-1 \Leftrightarrow s=-\frac{1}{2}$$

On vérifie pour l'équation (3)

$-t+2s=-(-1)-1=0$

donc les droites d et d' sont sécantes.

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection S de d et d', on remplace t par -1 dans la représentation paramétrique de d ou s par $\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de d'.

On obtient : $S\left(-\frac{1}{2};2;4\right)$.

2.a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ donc les points a, b et C ne sont pas alignés et les points A, B et C déterminent un plan.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1\times2+2\times(-3)+4\times1=2-6+4=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1\times2+2\times(-1)+4\times0=2-2=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

2.b. $M(x;y;z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x+1)+2\times(y-2)+4\times(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y+4z+1-4-4=0$

$\Leftrightarrow x+2y+4z-7=0$

3. $S\left(-\frac{1}{2};1;4\right)$ $\quad -\frac{1}{2}+2\times1+4\times4-7=\frac{21}{2}\neq0$

donc S n'appartient pas au plan (ABC) et les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

4.a. $H(-1;0:2)$ $\quad -1+2\times0+4\times2-7=-1+8-7=0$ le point H appartient au plan (ABC).

H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{SH}$ est normal au plan (ABC) soit $\overrightarrow{SH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$.

$\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{SH}=-\frac{1}{2}\vec{n}$.

H est le projeté orthogonal de S sur (ABC).

4.b. $SH^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+(-2)^2=\frac{1}{4}+1+4=\frac{1+4+16}{4}=\frac{21}{4}$ $\quad SH=\sqrt{\frac{21}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

SH est la plus petite distance du point S à un point M du plan (ABC).

Il n'existe donc pas de point M du plan (ABC) tel que $SM<\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

1. $M(x;y;z)$ $C(1;1;1)$ $S\left(-\frac{1}{2};1;4\right)$ $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CS}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CS} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=-\frac{3}{2}k\\y-1=0\times k\\z-1=3k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{3}{2}k+1\\y=0\times k+1\\z=3k+1\end{cases}$ $k\in[0;1]$

$M\left(-\frac{3}{2}k+1;1;3k+1\right)$ $k\in[0;1]$

2. $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2+\frac{3}{2}k\\1\\-3k\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}k\\-2\\-3k+1\end{pmatrix}$

Le triangle MAB est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \left(-2+\frac{3}{2}k\right)\times\left(\frac{3}{2}k\right)+1\times(-2)+(-3k)+(-3k+1)=0$

$\Leftrightarrow -3k+\frac{9}{4}k^2-2+9k^2-3k=0 \Leftrightarrow \frac{45}{4}k^2-6k-2=0$

$\Delta=36+4\times2\times\frac{45}{4}=126=9\times14$

$k_1=\frac{6-3\sqrt{14}}{\frac{45}{2}}=\frac{12-6\sqrt{14}}{45}$ $k_2=\frac{12+6\sqrt{14}}{45}$

$k_1<0$ et $k_2\simeq0{,}766$ donc $0\leqslant k_2\leqslant1$

Il existe donc un unique point M sur le segment [CM] tel que le triangle MAB soit rectangle en M.

<u>Remarque</u>

$MA^2=\left(-2+\frac{3}{2}k\right)^2+1^2+(-3k)^2=4-6k+\frac{9}{4}k^2+1+9k^2=\frac{45}{4}k^2-6k+5$

On a : $\frac{45}{4}k_2^2-6k_2=2$ donc pour la valeur de k_2 on a $MA^2=7$.

On a aussi $MB^2=7$