Exercice 3 — 4 points

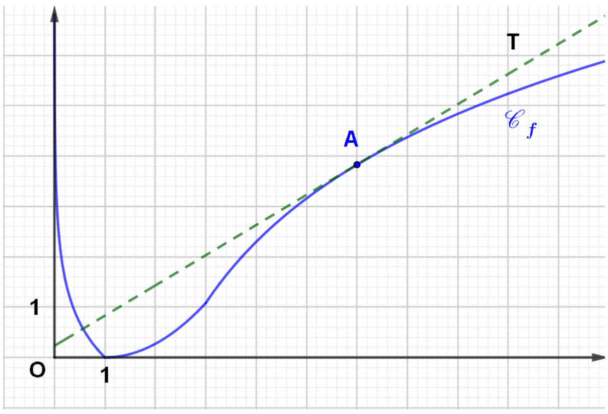
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier votre réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\dfrac{1+5^n}{2+3^n}$

Affirmation 1 :
La suite (u_n) converge vers $\dfrac{5}{3}$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :
$u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1}=3w_n-2n+3$
Affirmation 2 :
Pour tout entier naturel n, $w_n\geqslant n$.

3. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans un repère orthonormé sur la figure ci-dessous.
On précise que :
- T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 6 .
- L'axe des abscisses est la tangente horizontale à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.



Affirmation 3 :
D'après le graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.

4. Affirmation 4 :
Pour tout réel $x>0$, $\ln(x)-x+1\leqslant 0$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

$u_n=\frac{5^n}{3^n}\left(\frac{5^{-n}+1}{2\times 3^{-n}+1}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^n\times\left(\frac{5^{-n}+1}{2\times 3^{-n}+1}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{-n}=0$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{-n}=0$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty$ (car $\frac{5}{3}>1$) $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5^{-n}+1}{2\times 3^{-n}+1}=1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

$w_0=0$ et pour tout entier naturel n : $w_{n+1}=3w_n-2n+3$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $w_n\geqslant n$.

Initialisation

Pour $n=0$, $w_0=0$ donc $w_0\geqslant 0$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $w_n\geqslant n$ et on doit démontrer que $w_{n+1}\geqslant n+1$.

Si $w_n\geqslant n$ alors $w_{n+1}=3w_n-2n+3\geqslant 3n-2n+3=n+3\geqslant n+1$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $w_n\geqslant n$.

3. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

La courbe $\mathscr{C}_f$ n'est pas entièrement au dessus de sa tangente T au point d'abscisse 6.

Donc f n'est pas convexe sur $]0;+\infty[$.

4. Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)-x+1$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ $\qquad f(1)=0$

x	0		1		+∞
f '(x)	‖	–	0	+	
f(x)	‖	↗	0	↘	

f admet un maximum absolu : 0 sur $]0;\infty[$.

Donc pour tout réel $x>0$, on a : $f(x)\leqslant 0$ soit $\ln(x)-x+1\leqslant 0$.