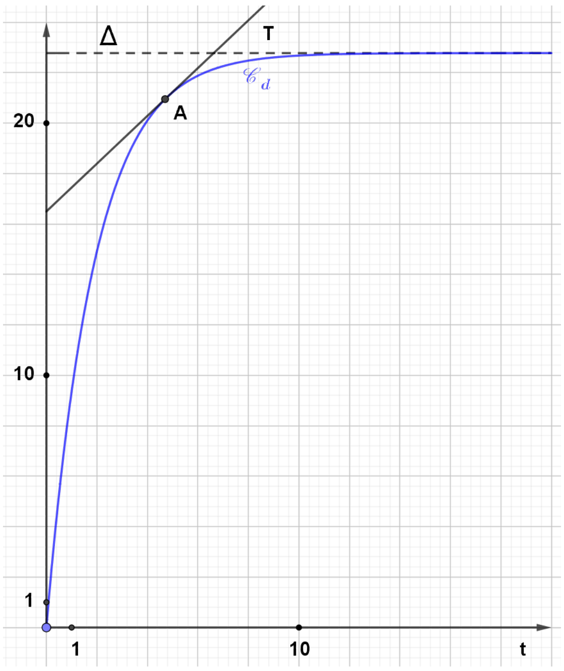
Exercice 4 6 points

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.
On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t, à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0;+\infty[$.
On a ainsi $d(0)=0$.
Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition.
On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :
- la courbe représentative $\mathscr{C}_d$ de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_d$ au point A d'abscisse $4,7$;
- L'asymptote Δ à $\mathscr{C}_d$ en $+\infty$.



Dans cette partie , aucune justification n'est attendue.
Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.
D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage ?

2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage ?

3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde ($m.s^{-1}$), en fonction de t, par une fonction v définie sur $[0;+\infty[$.

On admet que :

. la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;

. la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E): $y'+0,6y=e^{-0,6t}$ où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

On précise de plus que, lors de son arrivée sur zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 $m.s^{-1}$, c'est à dire $v'(0)=12$.

1.a. On considère l'équation différentielle : (E'): $y'+0,6y=0$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0;+\infty[$.

1.b. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=te^{-0,6t}$.
Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation de l'équation différentielle (E).

1.c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0;+\infty[$.

1.d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a : $v(t)=(12+t)e^{-0,6t}$.

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0;+\infty[$.

2.a. Montrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $v'(t)=(-6,2-0,6t)e^{-0,6t}$.

2.b. En admettant que : $v(t)=12e^{-0,6t}+\frac{1}{0,6}\times\frac{0,6t}{e^{0,6t}}$
déterminer la limite de v en $+\infty$.

2.c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

2.d. Montrer que l'équation $v(t)=1$ admet une unique solution α , dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet.
Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$: $v(t)=(12+t)e^{-0,6t}$.

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0;+\infty[$: $d(t)=\int_0^t v(t)\,dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par : $d(t)=e^{-0,6t}\left(-\frac{5}{3}t-\frac{205}{9}\right)+\frac{205}{9}$.

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.
Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

CORRECTION

Partie A

1. On détermine graphiquement l'abscisse du point de la courbe de $\mathcal{C}_d$ d'ordonnée 15, on obtient 2.
Le chariot aura parcouru 15 m en 2s.

2. L'équation de l'asymptote Δ à $\mathcal{C}_d$ en $+\infty$ est $y=k$ avec k légèrement inférieur à 23.
Donc la distance minimale prévue pour la zone de freinage est 23 m.

3. 4,7 est une valeur approchée de l'abscisse du point A de la courbe $\mathcal{C}_d$ d'ordonnée 21.
$d'(4,7)$ est le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}_d$ au point A.
Le point B de T appartenant à l'axe des ordonnées a pour ordonnée 16,5 (valeur approchée) ;
$x_A-x_B=4,7 \qquad y_A-y_B=21-16,5=4,5$
le coefficient directeur de T est : $\dfrac{4,5}{4,7}\simeq 1$ donc $d'(4,7)=1$.
Interprétation :
d est la distance, en mètre en fonction du temps en seconde, parcourue par le chariot.
d' est du chariot en fonction du temps en $m.s^{-1}$
donc la vitesse du chariot à l'instant 4,7s est 1 $m.s^{-1}$.

Partie B

1.a. $(E'):\quad y'+0,6\,y=0$
(E') est une équation différentielle du type : $y'+a\,y=0$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E') sur $[0;+\infty[$ est l'ensemble des fonctions f_k définies sur $[0;+\infty[$ par $f_k(t)=k\,e^{-0,6t}$ k est une constante réelle.

1.b. g est une solution de l'équation différentielle (E') si et seulement si pour tout réel t de l'intervalle $[0;+\infty[\quad g'(t)+0,6\,g(t)=e^{-0,6t}$.
$g(t)=t\,e^{-0,6t} \qquad g'(t)=1\times e^{-0,6t}-0,6\,t\,e^{-0,6t}=(1-0,6\,t)e^{-0,6t}$
$g'(t)+0,6\,g(t)=(1-0,6\,t)e^{-0,6t}=e^{-0,6t}$
donc g est une solution de (E) sur $[0;+\infty[$.

1.c. h est une solution de (E') $\Leftrightarrow$ Pour tout réel t de l'intervalle $[0;+\infty[\quad h'(t)+0,6\,h(t)=e^{-0,6t}$
$\Leftrightarrow\quad h'(t)+0,6\,h(t)=g'(t)+0,6\,g(t) \quad\Leftrightarrow\quad h'(t)-g'(t)+0,6\,h(t)-0,6\,g(t)$
$\Leftrightarrow\quad (h-g)'(t)+0,6(h(t)-g(t))=0 \quad\Leftrightarrow\quad h-g$ est solution de (E)
donc $(h-g)(t)=k\,e^{-0,6t}$ k constance réelle
$\Leftrightarrow\quad h(t)=k\,e^{-0,6t}+g(t)=k\,e^{¿}+t\,e^{-0,6t}=(k+t)e^{-0,6t}$.
Les solutions de (E') sont les fonctions h_k définies sur $[0;+\infty[$ par $h_k(t)=(k+t)e^{-0,6t}$ où k est une constante réelle.

1.d. v est la solution de l'équation différentielle (E') telle que $v(0)=12$.
$h_k(0)=12 \quad\Leftrightarrow\quad k=12$
Pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $v(t)=(12+t)e^{-0,6t}$

2.a. Pour tout réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $v(t)=(12+t)e^{-0,6t}$.
$v'(t)=1\times e^{-0,6t}-0,6\times(12+t)e^{-0,6t}=(1-7,2-0,6\,t)e^{-0,6t}$
$v'(t)=(-6,2-0,6\,t)e^{-0,6t}$

2.b. On admet que : $v(t)=12\,e^{-0,6t}+\dfrac{1}{0,6}\times\dfrac{0,6\,t}{e^{0,6t}}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}(-0,6\,t)=-\infty \qquad \lim\limits_{T\to-\infty}e^{T}=0 \qquad \lim\limits_{T\to-\infty}\dfrac{e^{-T}}{T}=-\infty \qquad \lim\limits_{T\to-\infty}\dfrac{-T}{e^{T}}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=0$

2.c. Le signe de $v'(t)$ est le signe de $(-6{,}2-0{,}6t)$

$$-6{,}2-0{,}6t=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}6t=-6{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad t=-\frac{6{,}2}{0{,}6}<0 \quad \text{donc} \quad v'(t)<0 \quad \text{sur} \quad [0;+\infty[$$

t	0		$+\infty$
v'(t)		−	
v(t)	12	↘	0

2.d. v est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $]0;12]$, $1\in]0:12]$ le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un réel unique α appartenant à $[0;+\infty[$ tel que $v(\alpha)=1$ donc l'équation $v(\alpha)=1$ admet une unique solution α appartenant à $[0;+\infty[$.
En utilisant la calculatrice :
$v(4{,}7)\simeq 0{,}99$ et $v(4{,}6)\simeq 1{,}05$ $\qquad 4{,}6\leqslant\alpha\leqslant 4{,}7$
$4{,}7$ est une valeur approchée de α au dixième près.

3. $v(\alpha)=1$ et v est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, donc le système se déclenche au bout de $4{,}7$s.

Partie C

1. $v(t)=(12+x)e^{-0{,}6x}$ $\qquad x\in[0;+\infty[$

$U(x)=12+x \qquad U'(x)=1$

$V'(x)=e^{-0{,}6x} \qquad V(x)=\dfrac{e^{-06x}}{-0{,}6}$

$$d(t)=\int_0^t v(x)\,dx=\left[(12+x)\frac{e^{-06x}}{-0{,}6}\right]_0^t-\int_0^t\frac{e^{-0{,}6x}}{-0{,}6}\,dx=(12+t)\frac{e^{-0{,}6t}}{-0{,}6}+\frac{12}{0{,}6}+\frac{1}{0{,}6}\int_0^x e^{-0{,}6x}\,dx$$

$$d(t)=-\left(\frac{12}{0{,}6}+\frac{t}{0{,}6}\right)e^{-0{,}6t}+\frac{12}{0{,}6}+\frac{1}{0{,}6}\left[\frac{e^{-0{,}6x}}{-0{,}6}\right]_0^t$$

$$d(t)=-\left(20+\frac{t}{0{,}6}\right)e^{-0{,}6t}+20+\frac{1}{0{,}36}(-e^{-06t}+1)=e^{-0{,}6t}\left(-20-\frac{t}{0{,}6}-\frac{1}{0{,}36}\right)+20+\frac{1}{0{,}36}$$

$$\frac{1}{0{,}6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3} \qquad \frac{1}{0{,}36}=\frac{100}{36}=\frac{25}{9} \qquad 20+\frac{25}{9}=\frac{180+25}{9}$$

donc $d(t)=e^{-0{,}6t}\left(-\dfrac{5}{3}t-\dfrac{205}{9}\right)+\dfrac{205}{9}$

2. Le déclenchement du système s'effectue au bout de $4{,}7$s.
La distance parcourue est alors $d(4{,}7)\simeq 20{,}95\text{ m}$.