## Exercice 1 — 5 points

**Partie A**

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $y'+0{,}4y=e^{-0{,}4t}$ où $y$ est une fonction de la variable $t$.
On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

**1.** Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t)=te^{-0{,}4t}$.
Vérifier que $u$ est solution de (E).

**2.** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t)=f(t)-u(t)$.
Soit (H) l'équation différentielle $y'+0{,}4y=0$.

**2.a.** Démontrer que si la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle (E).

On admettra que la réciproque est vraie.

**2.b.** Résoudre l'équation différentielle (H).

**2.c.** En déduire les solutions de (E).

**2.d.** Déterminer la solution $f$ de (E) telle que $f(0)=1$.

**Partie B**

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.
La glycémie en $g.L^{-1}$, en fonction du temps $t$, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction $f$ définie sur [0;6] par :
$f(t)=(t+1)e^{-0{,}4t}$

**1.a.** Montrer que,pour tout $t\in[0;6]$, $f'(t)=(-0{,}4t+0{,}6)e^{-0{,}4t}$.

**1.b.** Étudier les variations de $f$ sur [0;6] puis dresser le tableau de variations sur cet intervalle.

**2.** Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0{,}7$ $g.L^{-1}$.

**2.a.** Démontrer que sur l'intervalle [0;6], l'équation $f(t)=0{,}7$ admet une unique solution que l'on notera $\alpha$.

**2.b.** Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie ?
On exprimera ce temps à la minute près.

**3.** On souhaite déterminer la glycémie moyenne en $g.L^{-1}$ chez une personne lors des six heures qui suivent le repas.

**3.a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^6 f(t)\,dt=-23{,}75e^{-2{,}4}+8{,}75.$$

**3.b.** Calculer la glycémie moyenne en $g.L^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

**3.c.** En remarquant que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle $(E)$, expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.** $t \in \mathbb{R}$ $\quad u(t)=t\,e^{-0,4t}$ $\quad u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$u'(t)=1\times e^{-0,4t}+t\times(-0,4e^{-0,4t})=e^{-0,4t}-0,4\,t\,e^{-0,4t}$

$u'(t)+0,4\,u(t)=e^{-0,4t}-0,4\,t\,e^{-0,4t}+0,4\,t\,e^{-0,4t}=e^{-0,4t}$

donc $u$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

**2.a.** $t \in \mathbb{R}$ $\quad g(t)=f(t)-u(t)$

Si $g$ est solution de (H) alors pour tout nombre réel $t$ : $g'(t)+0,4\,g(t)=0$.

Or $g'(t)=f'(t)-u'(t)$ donc $f'(t)-u'(t)+0,4(f(t)-u(t))=0 \Leftrightarrow$

$f'(t)+0,4\,f(t)=u'(t)+0,4\,u(t) \Leftrightarrow f'(t)+0,4\,f(t)=e^{-0,4t}$ (car $u$ est solution de (E) )

On obtient $f$ est solution de (E).

**2.b.** (H) : $y'+0,4\,y=0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H) sont les .fonctions $g_k$ ($k$ constante réelle) définies sur $\mathbb{R}$ par $g_k(t)=k\,e^{-0,4t}$.

**2.c.** $f$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f-u$ solution de (H) sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Pour tout nombre réel $t$

$f(t)=g_k(t)+u(t)=k\,e^{-0,4t}+t\,e^{-0,4t}=(t+k)e^{-0,4t}$.

**2.d.** $f(0)=1=k\,e^{0} \quad \Leftrightarrow \quad k=1$

La solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $f(0)=1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=(t+1)e^{-0,4t}$

**Partie B**

**1.a.** $t\in[0;6]$ $\quad f(t)=(t+1)e^{-0,4t}$

$f$ est dérivable sur [0;6]

$f'(t)=1\times e^{-0,4t}+(t+1)(-0,4\,e^{-0,4t})=e^{-0,4t}-0,4\,t\,e^{-0,4t}-0,4\,e^{-0,4t}=(-0,4\,t+0,6)e^{-0,4t}$.

**1.b.** Pour tout nombre réel $t$ de [0;6], $e^{-0,4t}>0$, donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $-0,4\,t+0,6$

$$-0,4\,t+0,6=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{0,6}{0,4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1,5.$$

Si $0\leqslant t<1,5$ alors $-0,4\,t+0,6>0$.

Si $1,5<t\leqslant 6$ alors $-0,4\,t+0,6<0$.

$f(0)=1 \qquad f(1,5)=2,5\,e^{-0,6}\simeq 1,37 \qquad f(6)=7\,e^{-2,4}\simeq 0,64$

Tableau de variations de $f$ sur [0;6]

| x | 0 | | 1.5 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | – | |
| f(x) | 1 | ↗ | $2.5e^{-0.6}$ | ↘ | $7e^{-2.4}$ |

**2.a.** Si $0\leqslant t\leqslant 1,5$ alors $f(0)\leqslant f(t) \Leftrightarrow 1\leqslant f(t)$ donc l'équation $f(t)=0,7$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[0;1,5]$.

$f$ est continue et strictement décroissante sur $[1,5;6]$ à valeurs dans $[7e^{-2,4};2,5e^{-0,6}]$.

0,7 appartient à cet intervalle , le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(t)=0,7$ admet une solution unique $\alpha$ appartenant à l'intervalle [1,5;6].

Conséquence

L'équation $f(t)=0,7$ admet une unique solution $\alpha$ appartenant à l'intervalle [0;6].

**2.b.** En utilisant la calculatrice , on obtient un encadrement de $\alpha$.

$5,61<\alpha<5,62$.

$\alpha$ est le temps en heure pour lequel la personne est en hypoglycémie.

$0{,}61$ heure $=0{,}61\times 60=36{,}6$ minutes $\quad 0{,}62$ heure $=0{,}62\times 60=37{,}2$ minute

Le temps, à la minute près, pour la personne soit en hypoglycémie est 5h37minutes.

**3.a.** $\int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 (t+1)e^{-0,4t}dt$

$a(t)=t+1 \qquad a'(t)=1$

$b'(t)=e^{-0,4t} \qquad b(t)=\dfrac{e^{-0,4t}}{-0{,}4}=-2{,}5e^{-0,4t}$

$a$ et $b$ sont dérivables sur [0;6] et $a'$ et $b'$ sont continues sur [0;6].

En utilisant la formule d'intégration par parties ;

$$\int_0^6 f(t)dt = [-2{,}5(t+1)e^{-0,4t}]_0^6 - (-2{,}5)\int_0^6 e^{-0,4t}dt$$

$$\int_0^6 f(t)dt = -2{,}5\times 7e^{-2,4}+2{,}5 + 2{,}5[-2{,}5e^{-0,4t}]_0^6 = -17{,}5e^{2,4}+2{,}5-6{,}25e^{-2,4}+6{,}25$$

$$\int_0^6 f(t)dt = -23{,}75e^{-2,4}+8{,}75$$

**3.b.** $\int_0^6 f(t)dt \simeq 6{,}596$

La glycémie moyenne en g.L$^{-1}$ chez cette personne lors des six heures suivant le repas est :

$\dfrac{1}{6}\int_0^6 f(t)dt \simeq 1{,}10$ g.L$^{-1}$ au centième près.

**3.c.** $f$ est solution de (E) donc :

pour tout nombre réel $t$ $f'(t)+0{,}4f(t)=e^{-0,4t} \Leftrightarrow 0{,}4f(t)=-f'(t)+e^{-0,4t} \Leftrightarrow$

$f(t)=-2{,}5f'(t)+2{,}5e^{-0,4t}$

donc $\int_0^6 f(t)dt=-2{,}5\int_0^6 f'(t)dt + 2{,}5[-2{,}5e^{-0,4t}]_0^6 = -2{,}5[f(t)]_0^6-6{,}25(e^{-2,4}-1)$

$$\int_0^6 f(t)dt = -2{,}5(f(6)-f(0))-6{,}25e^{-2,4}+6{,}25=-2{,}5\times 7e^{-2,4}+2{,}5-6{,}25e^{-2,4}+6{,}25$$

$$\int_0^6 f(t)dt = 23{,}75e^{-2,4}+8{,}75$$

On obtient le résultat précédent sans effectuer une intégration par parties.