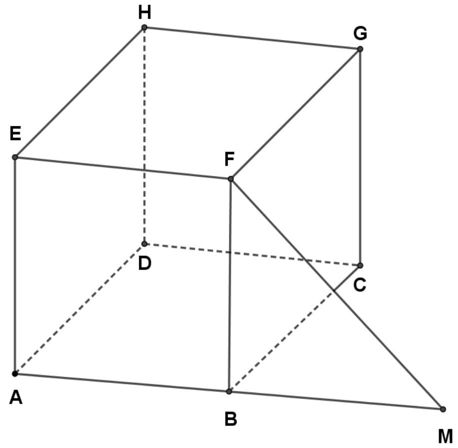
Exercice 2 5 points

On considère le cube ABCDEFGH. On place le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$.



Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.

2. Montrer que les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.

2.a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est : $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2.b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est : $\begin{cases} x=0 \\ y=k \\ z=k \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Montrer que le point d'intersection de (GM) et(AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées $(0;2;2)$.

3.a. Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.
3.b. Calculer l'aire de ce triangle.

4. Soit J le centre de la face BCGF.
4.a. Déterminer les coordonnées du point J.
4.b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est un vecteur normal au plan (AMN).
4.c. Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).

5. On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$

$\mathscr{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
Montrer que le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.

CORRECTION

Partie A

1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BM}$ donc le point M appartient au plan (ABF) contenant la face (ABFE) du cube ABCDEFGH.
(FG) est orthogonale au plan (ABF) et (FM) est contenue dans la plan (ABF) donc les droites (FG) et (FM) sont orthogonales et eles sont sécantes en F.
Conclusion : les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.

2. ABCDEFGH est un cube donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$ et (ABG)=(AGH)
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BM}$ donc $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ et M appartient au plan (ABG)=(AGH).
Les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

1. A(0;0;0) H(0,1;1) G(1;1;1) M(2;0;0) $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $1=0\times\lambda$ donc les vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires.

2.a. (GM) est la droite passant par G(1;1;1) et de vecteur directeur $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

est une représentation paramétrique de (GM).

2.b. Les vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (GM) et (AH) sont sécantes.
Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection N on résout le système :

$$\begin{cases}1+t=0\\1-t=k\\1-t=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+t=0\\1-t=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\k=2\end{cases}$$

En reportant dans les représentations paramétriques , on obtient $x=0$; y=2 et z=2.
Les droites (GM) et (AH) sont sécantes en $N(0;2;2)$.

3.a. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=2\times0+0\times2+0\times2=0$

les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.
Le triangle AMN est rectangle en A.

3.b. $AM^2=2^2+0^2+0^2=4$ $AM=2$
$AN^2=0^2+2^2+2^2=8$ $AN=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

L'aire du triangle AMN est égale à $\mathcal{A}_{AMN}=\frac{1}{2}\times AM\times AN=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ U.A.

4.a. J est le milieu de [BG]
$B(1;0;0)$ $G(1;1;1)$ donc $J(1;0,5;0,5)$

4.b. Le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est normal au plan (AMN) si et seulement si $\overrightarrow{FJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AMN) par exemples $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$.

$F(1;0;1)$ $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FJ}.\overrightarrow{AM}=0\times2+0,5\times0-0,5\times0=0$
$\overrightarrow{FJ}.\overrightarrow{AN}=0\times0+0,5\times2-0,5\times2=1-1=0$
donc le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

4.c. Une équation cartésienne du plan (AMN) est : $0\times x+0,5\times y-0,5\times z+d=0$
$A\in(AMN)$ donc $d=0$ (AMN): $0,5y-0,5z=0 \Leftrightarrow y-z=0$
$J(1;0,5;0,5)$ et $0,5-0,5=0$ donc $J\in(AMN)$.
$\overrightarrow{FJ}$ est orthogonal à (AMN) et $J\in(AMN)$ donc :
J est le projeté orthogonal de F sur le plan (AMN).

5. Pour le tétraèdre AMNF on considère la base AMN ($\mathcal{A}_{AMN}=2\sqrt{2}$) et la hauteur h est FJ.

$FJ^2=0^2+0,5^2+(-0,5)^2=0,25+0,25=0,5=\frac{1}{2}$ $\qquad FJ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Le volume du tétraèdre AMNF est : $\mathcal{V}_{AMNF}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}$ U.V.

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$ donc (BM) est orthogonale à la face BCGF du cube.
MB est la hauteur de la pyramide BCGFM relative à la base BCGF.
L'aire du carré BCGF est égale à $1\times 1=1$ U.A.
$BM=AB=1$

$\mathcal{V}_{BCGFM}=\frac{1}{3}\times 1\times 1=\frac{1}{3}$ U.V.

Le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.