Exercice 3 — 6 points

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{3x-2}$.

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2 $\nearrow$	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0=6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1}=f(u_n)$ est bien définie.

2.a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 6$.

2.b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle L la limite de (u_n).
On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x)=x$. Déterminer la valeur de L.

4. On considère la fonction rang écrite ci-dessous en langage Python.
On rappelle que sqrt(x) renvoie la racine carrée du nombre x.

```
from math import*

def rang(a):
  u=6
  n=0
  while u>=a:
    u=sqrt(3u-2)
    n=n+1
  return n
```

4.a. Pourquoi peut-on affirmer que rang(2,000001) renvoie une valeur ?

4.b. Pour quelles valeurs du paramètres a l'instruction rang(a) renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0=6$ et, pour tout n entier naturel, $v_{n+1}=3-\dfrac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1 .

2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n\neq 2$ et on pose : $w_n=\dfrac{v_n-1}{v_n-2}$.

2.a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0 .

2.b. On admet que, pour tout n entier naturel, $w_n-1=\dfrac{1}{v_n-2}$.

En déduire que, pour tout n entier naturel, $v_n=2+\dfrac{1}{1{,}25\times 2^n-1}$.

2.c. Calculer la limite de (v_n) .

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n<2{,}01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n\geqslant N$ les termes u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99;2{,}01[$.

CORRECTION

Partie A

1. $x\in[2;+\infty[$ $\quad f(x)=\sqrt{3x-2}$

f est dérivable sur $[2;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}>0$..

donc f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

$f(2)=\sqrt{3\times2-2}=\sqrt{4}=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x-2}=+\infty$.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour entier naturel n, on a : $2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 6$.

Initialisation

$u_0=6 \quad u_1=\sqrt{3\times6-2}=\sqrt{16}=4$

donc $2\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 6$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n, on suppose que : $2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 6$ et on doit démontrer que : $2\leqslant u_{n+2}\leqslant u_n\leqslant 6$.

Si $2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 6$ alors $f(2)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)\leqslant f(6)$ (car f est croissante sur $[2;+\infty[$)

$f(2)=2$; $f(u_{n+1})=u_{n+2}$; $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(6)=4\leqslant 6$

donc $2\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 6$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 6$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante et $2\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 2.

Toute suite minorée et décroissante est convergente donc la suite (u_n) converge.

3. On note $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=L$.

On admet que L est une solution de l'équation $f(x)=x$.

$$\begin{cases}f(x)=x\\ x\geqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3x-2}=x\\ x\geqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2=x^2\\ x\geqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+2=0\\ x\geqslant 2\end{cases}$$

$x^2-3x+2=0 \qquad \Delta=9-4\times2=1$

$x_1=\dfrac{3-1}{2}=1<2 \qquad x_2=\dfrac{3+1}{2}=2$

Donc l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ est $L=2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

4.a. $2{,}000001=2+10^{-6}>2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$ donc $\forall\alpha>0\ \exists N_\alpha\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N_\alpha\ \ 0\leqslant u_n-2\leqslant\alpha$.

Pour $\alpha=10^{-6}$ l'algorithme permet de déterminer la plus petite valeur de $N_{10^{-6}}$.

Donc rang(2,000001) renvoie une valeur.

4.b. Théoriquement, si $a>2$ l'algorithme renvoie un résultat.

Mais la réponse dépend du matériel utilisé pour exécuter le programme.

Si on considère l'exemple précédent, en utilisant un tableur avec 4 décimales.

a devient 2 et le programme ne s'arrête pas .

On obtient : $u_{34}=2{,}0001$ et $u_{35}=2$ si $n\geqslant 35$ alors $u_n=2$.

Si on considère l'exemple précédent, en utilisant un tableur avec 15 décimales.

On obtient $u_{48}=2{,}00000115\ldots$ et $u_{49}=2{,}00000086\ldots$

La valeur renvoyée est 49.

Partie B

1. $v_0=6$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=3-\frac{2}{v_n}$. $v_1=3-\frac{2}{6}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

2. Pour tout entier naturel n : $w_n=\frac{v_n-1}{v_n-2}$

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}-1}{v_{n+1}-2}=\left(3-\frac{2}{v_n}-1\right) : \left(3-\frac{2}{v_n}-2\right)=\left(\frac{2v_n-2}{v_n}\right) : \left(\frac{v_n-2}{v_n}\right)=\left(\frac{2v_n-2}{v_n}\right)\times\left(\frac{v_n}{v_n-2}\right)$$

$$w_{n+1}=\frac{2v_n-2}{v_n-2} = \frac{2(v_n-1)}{v_n-2}=2w_n$$

(w_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0=\frac{v_0-1}{v_0-2}=\frac{5}{4}=1{,}25$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $w_n=w_0\times q^n=1{,}25\times 2^n$.

On admet que $w_n-1=\frac{1}{v_n-2}$ donc $\frac{1}{w_n-1}=v_n-2$.

Soit $v_n=2+\frac{1}{w_n-1}=2+\frac{1}{1{,}25\times 2^n-1}$

2.c. $2>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}25\times 2^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=2$.

3. $v_n<2{,}01 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{1{,}25\times 2^n-1}<2{,}01 \Leftrightarrow \frac{1}{1{,}25\times 2^n-1}<0{,}01$

La suite est croissante donc pour tout entier naturel n, $w_n\geqslant w_0=1{,}25$ donc $1{,}25\times 2^n-1>0$

La fonction inverse est strictement sur $]0;+\infty[$ donc :

$v_n<2{,}01 \Leftrightarrow 1{,}25\times 2^n-1>\frac{1}{0{,}01}=100 \Leftrightarrow 1{,}25\times 2^n>99 \Leftrightarrow 2^n>\frac{99}{1{,}25}=79{,}2$

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc :

$\Leftrightarrow \ln(2^n)>\ln(79{,}2) \Leftrightarrow n\times\ln(2)>\ln(79{,}2)$

$2>1$ donc $\ln(2)>0$

$\Leftrightarrow n>\frac{\ln 79{,}2}{\ln(2)}\simeq 6{,}31$

n est un entier naturel donc $n=7$

Partie C

. On a vu que le plus entier naturel n tel que $2<v_n<2{,}01$ est $n=7$.

. Pour la suite (u_n), si on utilise le tableur $u_{16}=2{,}0116...$ et $u_{17}=2{,}0086...$
donc le plus petit entier naturel n tel que $2<u_n<2{,}01$ est $n=17$.

. Conclusion

Pour $n\geqslant 17$ tous les termes u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99;2{,}01[$.