

Exercice 4

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Un musée propose des visites avec ou sans audioguide. Les billets peuvent être achetés en ligne ou directement au guichet.

1. Lorsqu'une personne achète son billet en ligne, un code de validation lui est envoyé par SMS afin qu'elle confirme son achat.

Ce code est généré de façon aléatoire et est constitué de 4 chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.

Affirmation 1 :

Le nombre de codes différents pouvant être générés est 5040.

2. Une étude a permis de considérer que :

- la probabilité qu'une personne choisisse l'audioguide sachant qu'elle a acheté son billet en ligne est égale à 0,8.

- la probabilité qu'une personne achète son billet en ligne est égale à 0,7.

- la probabilité qu'une personne opte pour une visite sans l'audioguide est égale à 0,32.

Affirmation 2 :

La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet est supérieure à deux tiers.

3. On choisit au hasard 12 visiteurs de ce musée.

On suppose que le choix de l'option « audioguide » est indépendant d'un visiteur à l'autre.

Affirmation 3 :

La probabilité qu'exactement la moitié de ces visiteurs opte pour l'audioguide est égale à $924 \times 0,2176^6$.

4. Lorsqu'une personne dispose d'un audioguide, elle peut choisir parmi trois parcours :

- un premier d'une durée de cinquante minutes,

- un deuxième d'une durée d'une heure et vingt minutes,

- un troisième d'une durée d'une heure et quarante minutes.

Le temps de parcours peut être modélisé par une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	50 min	1 h 20 min	1 h 40 min
$P(X=x_i)$	0.1	0.6	0.3

Affirmation 4 :

L'espérance de X est 77 minutes.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

Pour le choix du premier chiffre distinct de zéro, il y a 9 possibilités.

Pour le choix du deuxième chiffre distinct du premier, il y a 9 possibilités.

Pour le choix du troisième chiffre distincts des deux chiffres précédents, il y a 8 possibilités.

Pour le choix du quatrième chiffre distincts des trois chiffres précédents, il y a 7 possibilités.

Le nombre de codes différents est égal à : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 81 \times 56 = 4536 \neq 5040$

2. Affirmation 2 : FAUSSE

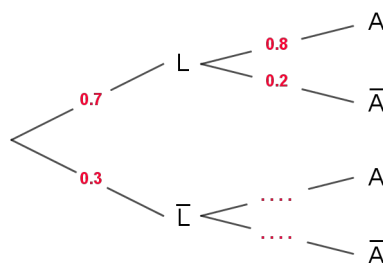
Preuve

On note :

L l'événement le visiteur achète son billet en ligne donc \bar{L} est l'événement le visiteur achète son billet au guichet.

A l'événement le visiteur choisit une visite avec audioguide donc \bar{A} est l'événement le visiteur choisit une visite sans audioguide.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



On a aussi : $P(\bar{A}) = 0,32$ et on veut calculer $P_{\bar{L}}(\bar{A})$.

On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(\bar{A}) = P(L \cap \bar{A}) + P(\bar{L} \cap \bar{A})$$

$$P(L \cap \bar{A}) = P(L) \times P_{\bar{L}}(\bar{A}) = 0,7 \times 0,2 = 0,14 \quad P(\bar{L} \cap \bar{A}) = P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(\bar{A}) = 0,3 \times P_{\bar{L}}(\bar{A})$$

$$0,32 = 0,14 + 0,3 \times P_{\bar{L}}(\bar{A}) \Leftrightarrow P_{\bar{L}}(\bar{A}) = \frac{0,32 - 0,14}{0,3} = 0,6 < \frac{2}{3}$$

3. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

On considère l'épreuve de Bernoulli suivante : On choisit au hasard un visiteur du musée.

Succès S est l'événement : « le visiteur choisit l'audioguide » $P(S) = P(A) = 1 - 0,32 = 0,68 = p$

$P(\bar{S}) = P(\bar{A}) = 0,32 = q$.

Le choix de l'audioguide est indépendant d'un visiteur sur l'autre.

On effectue 12 épreuves indépendantes. X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 12 épreuves. La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=0,68$.

$$P(X=6) = \binom{12}{6} \times p^6 \times q^{12-6} = \binom{12}{6} \times 0,68^6 \times 0,32^6$$

$$0,68^6 \times 0,32^6 = (0,68 \times 0,32)^6 = 0,2176^6$$

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!6!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 3 \times 2 \times 11 = 84 \times 11 = 924$$

$$\text{et } P(X=6) = 924 \times 0,2176^6$$

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

$$E(X) = 50 \times 0,1 + (60 + 20) \times 0,6 + (60 + 40) \times 0,3 = 5 + 48 + 30 = 83 \neq 77$$