

Exercice 1

6 points

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice les parties A et B sont indépendantes.

Partie A- Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

- chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à 0,4 ;
- la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que x suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
- 2.a. Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.
- 2.b. Calculer $P(X \leq 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?
3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Partie B- Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparaît plus pertinente :

- Si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est 0,5
- par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est 0,3.

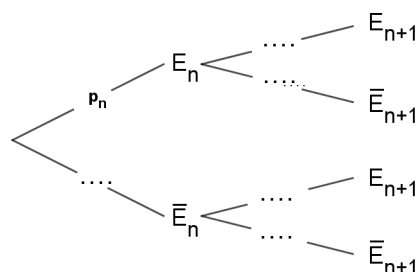
On considère que l'année de référence est 2023.

On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'évènement « le phénomène El Niño est dominant l'année, $2023+n$ » ;
- p_n la probabilité de l'évènement E_n .

En 2023 El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0=0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1=0,3$.
3. En vous aidant de l'arbre, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$p_{n+1}=0,2 p_n+0,3$$

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

- 4.a. Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n) .
- 4.b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n \leq \frac{3}{8}$.
- 4.c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n) .
- 4.d. En déduire la convergence de la suite (p_n) .

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n) .

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{3}{8}$ pour tout entier naturel n .
- 5.a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,2$ et préciser son premier terme.
- 5.b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n = \frac{3}{8}(1 - 0,2^n)$.
- 5.c. Calculer la limite de la suite (p_n) .
- 5.d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

On choisit au hasard une année :

Succès S : « El Niño est dominant l'année considérée » $P(S)=0,4$.

Échec $\bar{S}$: « El Niño n'est pas dominant l'année considérée » $P(\bar{S})=1-0,4=0,6$.

La survenue du phénomène El Niño se fait de manière indépendante d'une année sur l'autre.

On effectue donc 10 épreuves de Bernoulli indépendantes.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,4$

- 2.a. En utilisant la calculatrice

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^{10-2} \simeq 0,1209$$

- 2.b. $P(X \leq 2) = 0,1673$

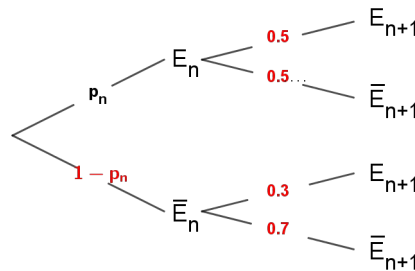
Il y a 16,73 % de chance que le nombre d'années, où le phénomène El Niño soit dominant, soit au plus 2 années.

3. $E(X) = np = 10 \times 0,4 = 4$

En moyenne sur 10 années, le phénomène El Niño sera dominant pour 4 années.

Partie B

- 1.



2. Le phénomène El Niño n'est pas dominant l'année 2023 donc l'année suivante la probabilité pour que le phénomène El Niño soit dominant est 0,3 donc $p_1 = 0,3$.

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\bar{E}_n \cap E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\bar{E}_n) \times P_{\bar{E}_n}(E_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times 0,5 + (1 - p_n) \times 0,3 = 0,5 p_n + 0,3 - 0,3 p_n$$

$$p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,3$$

- 4.a. En utilisant la calculatrice (avec 10 décimales) on obtient :

$$p_2 = 0,36 ; p_3 = 0,372 ; p_{10} = 0,3749999616 ; p_{11} = 0,3749999992 ; p_{12} = 0,3749999999$$

$$p_{13} = 0,375 ; p_{14} = 0,375.$$

On conjecture : (p_n) est une suite croissante et converge vers 0,375.

- 4.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$\text{on ait : } p_n \leq \frac{3}{8}.$$

Initialisation

$$p_0 = 0 \leq \frac{3}{8} \text{ donc la propriété est vérifiée pour } n=0.$$

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n , on suppose que :

$$p_n \leq \frac{3}{8} \text{ et on doit démontrer que } p_{n+1} \leq \frac{3}{8}.$$

$$\text{Si } p_n \leq \frac{3}{8} \text{ alors } 0,2 p_n \leq 0,2 \times \frac{3}{8} = \frac{0,6}{8} \text{ et } 0,2 p_n + 0,3 \leq \frac{0,6}{8} + 0,3 = \frac{0,6+2,4}{8} = \frac{3}{8} \text{ donc } p_{n+1} \leq \frac{3}{8}.$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a $p_n \leq \frac{3}{8}$.

4.c. Pour tout entier naturel n :

$$p_{n+1} - p_n = 0,2 p_n + 0,3 - p_n = 0,3 - 0,8 p_n = 0,8 \times \left(\frac{0,3}{0,8} - p_n \right) = 0,8 \times \left(\frac{3}{8} - p_n \right) \geq 0$$

donc la suite (p_n) est croissante.

4.d. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{8}$ donc la suite (u_n) est convergente.

$$5. \quad u_n = p_n - \frac{3}{8} \Leftrightarrow p_n = u_n + \frac{3}{8}$$

5.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{8} = 0,2 p_n + 0,3 - \frac{3}{8} = 0,2 \left(u_n + \frac{3}{8} \right) - \frac{0,6}{8} = 0,2 u_n + \frac{0,6}{8} - \frac{0,6}{8}$$

$$u_{n+1} = 0,2 u_n$$

(u_n) est la suite géométrique de raison $0,2$ et de premier terme $u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$.

5.b. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times 0,2^n = -\frac{3}{8} \times 0,2^n$$

$$\text{et } p_n = u_n + \frac{3}{8} = -\frac{3}{8} \times 0,2^n + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} (1 - 0,2^n)$$

5.c. $0 \leq 0,2 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = \frac{3}{8}$.

5.d. À long terme, en moyenne, il y aura 3 années où le phénomène El Niño sera dominant sur 8 années.