

Exercice 2

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Dans une classe de 24 élèves, il y a 14 filles et 10 garçons.

Affirmation 1 :

Il est possible de constituer 272 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \sin(2x + \pi)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné.

Affirmation 2 :

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est $y = 6x - 3\pi$.

3. On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = (2x + 1) \ln(x)$.

Affirmation 3 :

La fonction F est une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 45e^{0,06t} + 20$.

Affirmation 4 :

La fonction g est l'unique solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,006y = 1,2$ vérifiant $g(0) = 65$.

5. On considère l'équation différentielle : $(E_2) : y' - y = e^{0,4x}$.

où y est une fonction positive de la variable réelle x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y .

Affirmation 5 :

Les solutions de l'équation (E_2) sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : JUSTE

Preuve

Le nombre de groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons est :

$$\binom{14}{2} \times \binom{10}{2} = \frac{14 \times 13}{2} \times \frac{10 \times 9}{2} = 7 \times 13 \times 5 \times 9 = 91 \times 45 = 4095.$$

$272 < 4095$, il est donc possible de constituer 272 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.

2. Affirmation 2 : JUSTE

Preuve

Pour tout nombre réel x :

$$f(x) = 3 \sin(2x + \pi) \quad \text{et} \quad f'(x) = 6 \cos(2x + \pi)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin(\pi + \pi) = 0 \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 \cos(\pi + \pi) = 6.$$

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est :

$$y - 0 = 6\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = 6x - 3\pi$$

3. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

Pour tout nombre réel x :

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = 2 \ln(x) + (2x+1) \times \left(\frac{1}{x}\right) = 2 \ln(x) + 2 + \frac{1}{x}$$

$$F'(1) = 0 + 2 + 1 = 3 \quad f(1) = 2 \quad \text{donc } F'(1) \neq f(1)$$

F n'est pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

Pour tout nombre réel t :

$$g(t) = 45e^{0,06t} + 20 \quad g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(t) = 45 \times 0,06 e^{0,06t} = 2,7e^{0,06t}$$

$$g'(t) + 0,06g(t) = 2,7e^{0,06t} + 0,06 \times (45e^{0,06t} + 20) = 2,7e^{0,06t} + 2,7e^{0,06t} + 0,6 \times 20 = 5,4e^{0,06t} + 1,2$$

$$5,4e^{0,06t} > 0 \quad \text{donc } g \text{ n'est pas une solution de l'équation différentielle } (E_1)$$

5. Affirmation 5 : JUSTE

Preuve

Pour toute solution f positive sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_2) , on a pour tout réel x :

$$f'(x) = f(x) + 3e^{0,4x} > 0$$

$$f' \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f''(x) = f'(x) + 1,2e^{0,4x} > 0$$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.