

Exercice 3

4 points

On considère la fonction f définie sur $]0;8]$ par : $f(x) = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$.

Soit $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$.

2. En déduire que pour tout $x \in]0;8]$, $f(x) \geq 0$.

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

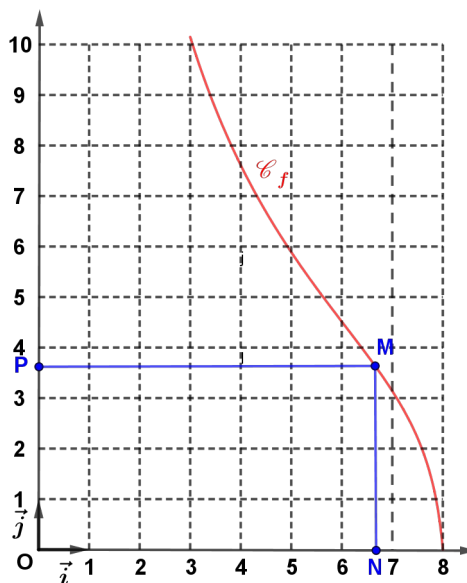
Partie B

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous.

Soit M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x avec $x \in]0;8]$.

On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle $ONMP$.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x .

2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;8]$:

$$\mathcal{A}(x) = 10 \ln(-x^2 + 7x + 9)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale ? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k .

On souhaite déterminer la plus petite valeur de x , approchée au dixième, appartenant à $[3,5;8]$, pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(x)$ devient inférieure ou égale à k . Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-après.

Pour rappel, en langage python, $\ln(x)$ s'écrit $\log(x)$.

```
1  from math import*
2
3  def A(x):
4      return 10*log(-1*x**2+7*x+9)
5
6  def plus petite valeur(k):
7      x=3.5
8      while A(x) .....:
9          x=x+0.1
10     return .....
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.
2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur(30)` ?
3. Que se passe-t-il lorsque $k=35$? Justifier.

CORRECTION

Partie A

$$1. -x^2+7x+8 \geq 0 \quad \Delta = 7^2 - 4 \times 8 = 49 - 32 = 17 = 9^2 \quad x_1 = \frac{-7-9}{-2} = 8 \quad x_2 = \frac{-7+9}{-2} = -1$$

$$S = [-1; 8]$$

2. Remarque :

$$\text{Si } x \in]0; 8] \text{ alors } -x^2+7x+8 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+7x+9 \geq 1$$

$\ln$ est une fonction croissante sur $]0; +\infty[$

$$\text{donc } \ln(-x^2+7x+9) \geq \ln(1) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{10 \ln(-x^2+7x+9)}{x} \geq 0$$

3. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses.

Partie B

$$1. N(0; x) \quad P(0; f(x)) \quad P\left(0; \frac{10 \ln(-x^2+7x+9)}{x}\right)$$

$$2. x \in]0; 8] \text{ donc } x \geq 0 \text{ et } f(x) \geq 0 \text{ donc } ON = x \text{ et } OP = \frac{10 \ln(-x^2+7x+9)}{x}$$

$$\mathcal{A}(x) = ON \times OP = 10 \ln(-x^2+7x+9)$$

$$3. \mathcal{A} \text{ est dérivable sur }]0; 8] \text{ et } \mathcal{A}'(x) = \frac{-2x+7}{-x^2+7x+9}$$

Or $-x^2+7x+9 \geq 1$ donc le signe $\mathcal{A}'(x)$ est le signe de $(-2x+7)$

$$-2x+7=0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} = 3,5 \quad -2x+7 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2} = 3,5 \quad -2x+7 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2} = 3,5$$

Tableau de variations de $\mathcal{A}$

x	0	3.5	8
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$	$10 \ln(9)$	$10 \ln(21.25)$	0

$$\mathcal{A}(0) = 10 \ln(9) \approx 21,97 \quad \mathcal{A}(8) = 0 \quad \mathcal{A}(3,5) = 10 \ln(-3,5^2 + 3,5 \times 7 + 9) = 10 \ln(21,25) \approx 30,56$$

L'aire maximale du rectangle ONMP est obtenue pour $x=3,5$.

L'aire maximale est égale à $10 \ln(21,25) \approx 30,56$.

Le point $M(3,5; 10 \ln(21,25))$ est le point permettant d'obtenir l'aire maximale de ONMP.

Partie C

1.

```

1  from math import*
2
3  def A(x):
4      return 10*log(-1*x**2+7*x+9)
5
6  def plus petite valeur(k):
7      x=3.5
8      while A(x) >= k:
9          x=x+0.1
10     return x
    
```

2. Rappel :

$\mathcal{A}$ est décroissante sur $[3,5;8]$.

En utilisant la calculatrice ou un tableur, on obtient :

$$\mathcal{A}(4,5) \simeq 30,0815 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(4,6) \simeq 29,9773$$

donc l'instruction `pluspetitevaleur(30)` retourne 4,6.

3. $\mathcal{A}(3,5)$ est la valeur maximale de l'aire de ONMP et $35 > \mathcal{A}(3,5)$

donc l'instruction `pluspetitevaleur(35)` retourne 3,5.