Exercice 4 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points : $A(4;-1;3)$, $B(-1;1;-2)$, $C(0;4;5)$ et $D(-3;-4;6)$.

1.a. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x+30y-17z=35$.
1.b. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.
Du segment [AB].

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.
On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment [AB].
2.a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].
2.b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x-2y+5z=10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment [CD].
3.a. Soit M un point de P_2 de coordonnées $(x;y;z)$.
Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.
En déduire qu'une équation cartésienne du plan P_2 est : $-3x+8y+z=10$.
3.b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x= -2-1{,}9t \\ y= t \\ z= 4+2{,}3t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2.

On note P_3 le plan médiateur du segment [AC].
On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x-10y-4z=-15$.

5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. $A(4;-1;3)$ $B(-1;1;-2)$ $C(0;4;5)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\2\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}-5=-4\lambda\\2=5\lambda\\-5=2\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1,25\\\lambda=0,4\\\lambda=-2,5\end{cases}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

1.b. Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si le point D appartient au plan ABC).

$(ABC):\ 29x+30y-17z=35$ $D(-3;-4;6)$

Or $29\times(-3)+30\times(-4)-17\times6=-87-120-102=-309\neq35$.

Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2.a. Soit I le milieu de [AB] $I\left(\frac{4-1}{2};\frac{-1+1}{2};\frac{3-2}{2}\right)$ $I(1,5;0;0,5)$.

2.b. P_1 est le plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\2\\-5\end{pmatrix}$.

$P_1:\ -5x+2y-5z=k$ $I\in P_1$ donc $-5\times1,5+2\times0-5\times0,5=k \Leftrightarrow k=-7,5-2,5=-10$

$P_1:\ -5x+2y-5z=-10 \Leftrightarrow 5x-2y+5z=10$

3.a. $M(x;y;z)$ $C(0;4;5)$ $D(-3;-4;6)$

$CM^2=(x-0)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=x^2+y^2+z^2-8y-10z+16+25=x^2+y^2+z^2-8y-10z+41$

$DM^2=(x+3)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=x^2+y^2+z^2+6x+8y-12z+9+16+36$

$DM^2=x^2+y^2+z^2+6x+8y-12z+61$

P_2 est l'ensemble des points M tels que $CM^2=DM^2$.

$CM^2=DM^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-8y-10z+41=x^2+y^2+z^2+6x+8y-12z+61$

$\Leftrightarrow -6x-16y+2z=20 \Leftrightarrow -3x-8y+z=10$

$P_2:\ -3x-8y+z=10$

3.b. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à P_1.

$\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal à P_2.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires (sinon les points A, B, C et D seraient coplanaires) donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles ils sont donc sécants.

4. Δ est la droite passant par $E(-0;0;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1,9\\1\\2,3\end{pmatrix}$.

Δ est la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 si et seulement si Δ soit contenue dans P_1 et dans P_2 c'est à dire E appartienne à P_1 et P_2 et que $\vec{u}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$P_1:\ 5x-2y+5z=10$ $E(-2;0;4)$

$5\times(-2)-2\times0+5\times4=-10+0+20=10$ donc $E\in P_1$.

$P_2:\ -3x-8y+z=10$ $E(-2;0;4)$

$-3\times(-2)-8\times0+4=6+0+4=10$ donc $E\in P_2$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1,9\\1\\2,3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\1\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-8\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\overrightarrow{AB}=-1,9\times(-5)+1\times2+2,3\times(-5)=9,5+2-11,5=0$

$\vec{u}.\overrightarrow{CD}=-1,9\times(-3)+1\times(-8)+2,3\times1=5,7-8+2,3=0$

Δ est donc la droite d'intersection de P_1 et P_2.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

5. P_3 : $8x-10y-4z=-15$

$\vec{N}\begin{pmatrix}8\\-10\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1{,}9\\1\\2{,}3\end{pmatrix}$

Δ et P_3 sont sécants si et seulement si $\vec{N}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux.

$\vec{N}.\vec{u}=8\times(-1{,}9)-10\times1-4\times2{,}3=-15{,}2-10-9{,}2=-34{,}4\neq0$

Δ et P_3 sont sécants.

6. On note F le point d'intersection de Δ et P_3.

F appartient à Δ donc F appartient à P_1 et F appartient à P_2 ;

F appartient à P_1 donc $FA=FB$.

F appartient à P_2 donc $FC=FD$.

F appartient à P_3 donc $FA=FC$.

Conclusion :

$FA=FB=FC=FD$

On admet qu'il existe un unique point H équidistant des quatre points A, B, C et D

donc $F=H$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés