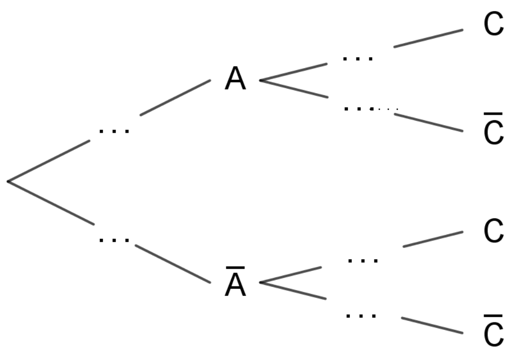
Exercice 1 5 points

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.
. Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
. L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
. L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.
Un joueur prend une boule dans le sac :
. si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
. si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.
On note le évènements suivants :
. A : le joueur obtient la boule avec la lettre A.
. C : le joueur obtient un billet de 50 euros.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous représentant la situation.



2. Quelle est la probabilité de l'évènement : « *le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 euros* » ?

3. Démontrer que la probabilité de C est égale à 0,3375.

4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.
L'affirmation « *Il y a plus de 80 % de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre B* » est-elle vraie ? Justifier.

5. On note X_1 la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur.
Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 €, on a $X_1=50$.
Montrer que l'espérance $E(X_1)$ est égale à 23,50 et que la variance $V(X_1)$ est égale à 357,75.

6. Après avoir remis la boule dans le sac et le billet dans l'urne où il a été pris, le joueur joue une deuxième partie . On note X_2 la variable aléatoire qui donne la somme obtenue par le joueur lors de cette deuxième partie.
On note Y la variable aléatoire ainsi définie : $Y=X_1+X_2$.
6.a. Montrer que $E(Y)=47$.
6.b. Expliquer pourquoi on a $V(Y)=V(X_1)+V(X_2)$.

7. Le joueur joue de même une troisième, une quatrième, . . . , une centième partie.
On définit donc de même façon les variables aléatoires $X_3, X_4, \dots, X_{100}$.
On note Z la variable aléatoire définit par $Z=X_1+X_2+\dots+X_{100}$.
Démontrer que la probabilité que Z appartienne à l'intervalle $[1950;2750]$ est supérieure ou égale à 0,75.

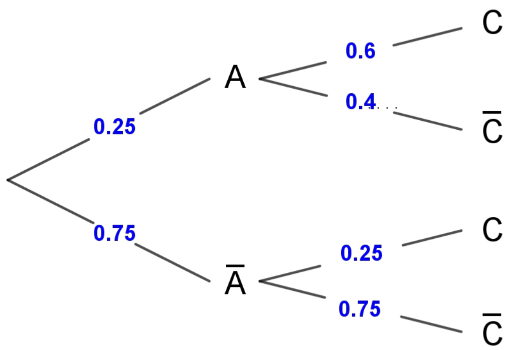
CORRECTION

1. $\bar{A}$ est l'évènement : « le joueur obtient une boule avec la lettre B ».
$\bar{C}$ est l'évènement : « le joueur obtient un billet de 10 euros ».

$P(A)=\frac{1}{4}=0{,}25$ $\quad P(\bar{A})=1-0{,}25=0{,}75$ $\quad P_A(C)=\frac{3}{5}=0{,}6$ $\quad P_A(\bar{C})=1-0{,}6=0{,}4$

$P_{\bar{A}}(C)=\frac{1}{4}=0{,}25$ $\quad P_{\bar{A}}(\bar{C})=1-0{,}25=0{,}75$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(A\cap C)=P(A)\times P_A(C)=0{,}25\times 0{,}6=0{,}15$

3. En utilisant la formules des probabilités totales.
$P(C)=P(A\cap C)+P(\bar{A}\cap C)$
$P(C)=0{,}15+0{,}75\times 0{,}25=0{,}15+0{,}1875=0{,}3375$

4. $P_{\bar{C}}(\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{0{,}75\times 0{,}75}{0{,}6625}=\frac{48}{53}\simeq 0{,}8{,}49>0{,}80$.
Donc l'affirmation est vraie.

5. On détermine la loi de probabilité de X_1 .

x_i	10	50
$P(X_1=x_i)$	0.6625	0.3375

$E(X_1)=6{,}625+3{,}375\times 5=23{,}50$
$V(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=100\times 0{,}6625+2500\times 0{,}3375-23{,}50^2=66{,}25+843{,}75-552{,}25$
$V(X_1)=357{,}75$

6.a. $E(Y)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$ $\quad X_1$ et X_2 ont la même loi de probabilité.
$E(Y)=2\times 23{,}5=47$

6.b. Les tirages se font avec remise donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes donc :
$V(Y)=V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)=2\times 357{,}75$
$V(Y)=715{,}50$

7. $E(Z)=100\times E(X_1)=2350$ $\quad V(Z)=100\,V(X_1)=35750$
$]1950\,;2750[=]2350-400\,;2350+400[$
$1950<Z<2750 \quad\Leftrightarrow\quad -400<Z-E(Z)<400 \quad\Leftrightarrow\quad |Z-E(Z)|<400$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne pour $t>0$: $P(|Z-E(Z)|\geqslant t)\leqslant\frac{V(Z)}{t^2}$.

$P(|Z-E(Z)|\geqslant 400)\leqslant\frac{V(Z)}{400^2}=\frac{35750}{160000}=\frac{143}{640}\simeq 0{,}223$

$P(|Z-E(Z)|<400)\geqslant 1-\frac{143}{640}\simeq 0{,}777$ donc $P(|Z-E(Z)|>400)\geqslant 0{,}75$