Exercice 2 4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points :
$A(4;-4;4)$ $B(5;-3;2)$ $C(6;-2;3)$ $D(5;1;1)$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x-y-8=0$

3. On note d la droite passant par le point D et orthogonale au plan (ABC).
3.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
3.b. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
Déterminer les coordonnées du point H.
3.c. Montrer que $DH=2\sqrt{2}$.

4.a. Montrer que le volume de la pyramide ABCD est égale à 2.
On rappelle que le volume V d'une pyramide se calcule à l'aide de la formule :
$$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$$
où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base de la pyramide et h la hauteur correspondante.
4.b. On admet que l'aire du triangle BCD est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan (BCD.

CORRECTION

1. $A(4;-4;4)$ $B(5;-3;2)$ $C(6;-2;3)$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}=-1\times1-1\times1+2\times1=-2+2=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc le triangle ABC est rectangle en B.

2. Les points A, B et C ne sont pas alignés car les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (non nuls et orthogonaux) donc les points A, B et C déterminent un plan.

$x-y-8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) si et seulement si les coordonnées des points A, B et C sont solutions de l'équation : $x-y-8=0$.

$A(4;-4;4)$ $\quad 4-(-4)-8=0$

$B(5;-3;2)$ $\quad 5-(-3)-8=0$

$C(6;-2;3)$ $\quad 6-(-2)-8=0$

donc $x-y-8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

3.a. $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc $\vec{N}$ est un vecteur directeur de d et d passe par le point $D(5;1;1)$.

On obtient pour représentation paramétrique de d : $\begin{cases}x=5+t\\y=1-t\\z=1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

3.b. H est le point d'intersection du plan (ABC) et de la droite d.

On résout le système : $\begin{cases}x-y-8=0\\x=5+t\\y=5+t\\z=1\end{cases}$ On obtient : $5+t-(1-t)-8=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5+t-1+t-8=0$

$\Leftrightarrow\ 2t=4 \quad\Leftrightarrow\quad t=2 \qquad x_H=5+2=7 \qquad y_H=1-2=-1 \qquad z_H=1 \qquad F(7;-1;1)$.

3.c. $D(5;1;1)$ $\quad H(7;-1;1)$ $\quad DH^2=(7-5)^2+(-111)^2+(1-1)^2=4+4=8$

$DH=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ (en unité de longueur)

4.a. Pour la pyramide ABCD, DH est la hauteur associée à la base ABC.

L'aire de ABC est égale à $\mathcal{B}=\frac{1}{2}\times BA\times BC$ (unité d'aire).

$BA^2=(-1)^2+(-1)^2+2^2=6 \quad BA=\sqrt{6}. \quad BC^2=1^2+1^2+1^2=3 \quad BC=\sqrt{3}.$

$\mathcal{B}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{18}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad h=DH=2\sqrt{2}$

$V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times2\sqrt{2}=2$ (unité de volume)

4.b. La distance δ du point A au plan (BCD) est la hauteur de la pyramide ABCD associée à la base BCD.

$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{42}}{2}\times\delta=2 \quad\Leftrightarrow\quad \delta=\frac{12}{\sqrt{42}}=\frac{12\sqrt{42}}{42}=\frac{2\sqrt{42}}{7}$