

Exercice 3

6 points

On considère n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f_n(x) = x^n e^{1-x}$.

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0;1]$ et on note f'_n sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n=1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0;1]$ par : $f_1(x) = x e^{1-x}$.

1. Montrer que $f'_1(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0;1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0;1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est à dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx .$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

- 1.a. Justifier que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.
- 1.b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- 1.c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- 2.a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.
- 2.b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction suite() :

```

from math import exp

def suite():
    u = ...
    for n in range(1, ...):
        u = ...
    return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction suite() renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3. b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

CORRECTION

Partie A

1. $x \in [0;1]$ $f(x) = x e^{1-x}$
 $u(x) = x$ $u'(x) = 1$ $v(x) = e^{1-x}$ $v'(x) = -e^{1-x}$
 $f_1'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-e^{1-x}) = (1-x)e^{1-x}$.
 Le signe de $f_1'(x)$ est le signe de $(1-x)$ sur $[0;1]$.
 $f_1'(1) = 0$ et si $x \in [0;1[$ alors $f_1'(x) > 0$.

2. $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 1 \times e^0 = 1$
 Tableau de variation de f_1

x	0	1
f₁'(x)		0
f₁(x)	0	1

3. f_1 est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$, $0,1 \in [0;1]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe α unique appartenant à $[0;1]$ tel que $f_1(\alpha) = 0,1$ donc l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$.

Partie B

- 1.a. $0 \leq x \leq 1$ donc pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq x^n$ et $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$.
 Si $0 \leq x \leq 1$ alors $x-1 \leq 0$ et $x^n \geq 0$ donc $x^{n+1} - x^n \leq 0 \Leftrightarrow x^{n+1} \leq x^n$.
 Conséquence : $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.

- 1.b. Pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ et $e^{1-x} > 0$ donc $0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x}$;
 En utilisant les propriétés de l'intégrale et de la relation d'ordre (avec $0 < 1$), on obtient :

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \text{ soit } 0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

- 1.c. Pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

2.a. $u_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} \, dx$

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{n+1} & u'(x) &= (n+1)x^n \\ v'(x) &= e^{1-x} & v(x) &= -e^{1-x} \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} \, dx = [x^{n+1}(-e^{1-x})]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{1-x}) \, dx = -1 \times e^0 + 0 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$$

Soit $u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n$

- 2.b.

```
from math import exp

def suite():
    u = e-2
    for n in range(1,7):
        u = (n+1)u-1
    return
```

3.a. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

La suite (u_n) est décroissante donc $u_{n+1} \leq u_1 \Leftrightarrow (n+1)u_n - 1 \leq e - 2 \Leftrightarrow (n+1)u_n \leq e - 1$.

$$\text{On obtient } (n+1)u_n \leq e \Leftrightarrow u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3.b. Pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.