Exercice 4 — 5 points

*Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**, en justifiant la réponse.*
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-x^2$.
Affirmation 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $2y'+3y=\sin x+8\cos x$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2\cos x-\sin x$.
Affirmation 2 : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(3x+1)+8$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=25$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=g(u_n)$.
On admet que la suite (u_n) est strictement positive.
Affirmation 3 : La suite (u_n) est décroissante.

4. On considère une fonction affine h définie sur $\mathbb{R}$.
On note k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x)=x^4+x^2+h(x)$.
Affirmation 4 : La fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

5. Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.
Exemple : le mot BAC possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB,CAB, CBA.
Affirmation 5 : Le mot EULER possède 120 anagrammes.

CORRECTION

1. **Affirmation 1 : VRAIE**

Preuve

$x\in]0;+\infty[$ $\quad$ $f(x)=\ln(x)-x^2$ $\quad$ $f(x)=x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2}-1\right)=-1$ $\quad$ et $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. **Affirmation 2 : VRAIE**

Preuve

(E) : $2y'+3y=\sin(x)+8\cos(x)$ $\quad$ Pour $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=2\cos(x)-\sin(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-2\sin(x)-\cos(x)$.

$2f'(x)+3f(x)=4\sin(x)+2\cos(x)+6\cos(x)-3\sin(x)=\sin(x)+8\cos(x)$

Donc f est une solution de (E).

3. **Affirmation 3 : VRAIE**

Preuve

$x\in[0;+\infty[$ $\quad$ $g(x)=\ln(3x+1)+8$

g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'(x)=\dfrac{3}{3x+1}>0$.

g est croissante sur $[0;+\infty[$ et $g(0)=8$ donc $g(x)\geqslant 8$.

$u_0=25$ $\quad$ $u_1=\ln(76)+8\simeq 12{,}33\leqslant u_0$ donc $u_1\leqslant u_0$

On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $8\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

Initialisation

$u_0=25$ $\quad$ $u_1\simeq 12{,}33$ donc $8\leqslant u_1\leqslant u_0$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n, on suppose que $8\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ et on doit démontrer que $8\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

Si $8\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ alors $g(8)\leqslant g(u_{n+1})\leqslant g(u_n)$ car g est croissante sur $[0;+\infty[$.

Or $g(8)\geqslant 8$ et $g(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $g(u_n)=u_{n+1}$ donc $8\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $8\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

Conséquence

La suite (u_n) est décroissante.

4. **Affirmation 4 : VRAIE**

Preuve

h est une fonction affine donc il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x on a $h(x)=ax+b$.

Donc $k(x)=x^4+x^2+ax+b$ et k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$k'(x)=4x^3+2x+a$ et $k''(x)=12x^2+2>0$

La fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

5. **Affirmation 5 : FAUSSE**

Preuve

Le nombre d'anagrammes d'un mot de 5 lettres distinctes deux à deux est : $5!=1\times2\times3\times4\times5=120$.

Le mot EULER contient 2 fois la lettre E les autres lettres sont distinctes deux à deux.

Le nombre d'anagrammes du mot EULER est : $\dfrac{5!}{2!}=\dfrac{120}{2}=60\neq 120$.