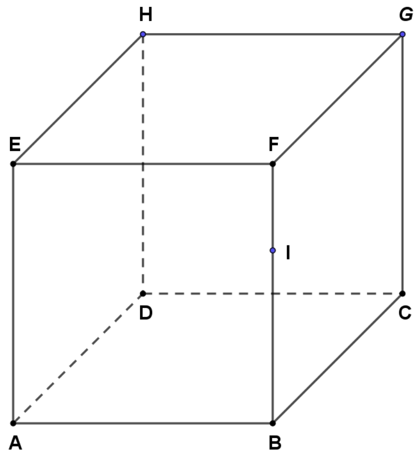
Exercice 1 4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et le point I défini par $\overrightarrow{FI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$.

On pourra se placer dans le repère orthonormé de l'espace $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.



1. On considère le triangle HAC.
Affirmation 1 :
Le triangle HAC est un triangle rectangle.

2. On considère les droites (HF) et (DI).
Affirmation 2 :
Les droites (HF) et (DI) sont sécantes.

3. On considère un réel α appartenant à l'intervalle $]0;\pi[$.
On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \sin(\pi-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$
Affirmation 3 :
Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (FAC).

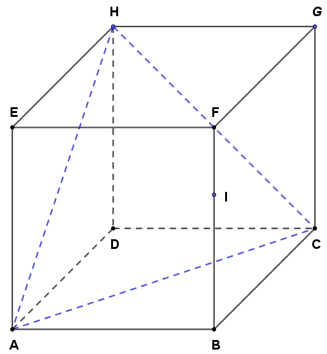
4. Le cube ABCDEFGH possède 8 sommets.
On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets quelconques du cube.
Affirmation 4 :
$N=\frac{8^2}{2}$.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

Le triangle HAC est équilatéral $AH=AC=HC=\sqrt{2}$ (longueur d'une diagonale d'une face du cube).



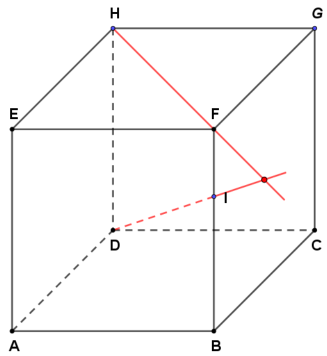
2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

ABCDEFGH est un cube donc $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BF}$ donc DHFB est un parallélogramme et B appartient au plan (DHF) et la droite (BF) est contenue dans ce plan.

$I\in(BF)$ donc $I\in(DHF)$ et les droites (HF) et (DI) sont coplanaires, l'unique parallèle à (HF) dans le plan (DHF) passant par D est la droite (DB).

Les droites (DB) et (DI) sont sécantes donc les droites (HF) et (DI) sont sécantes.



3. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$ et $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$

Si $\vec{u}$ est normal au plan (FAC) alors $\vec{u}$ est orthogonal à tout v ecte ur du plan (FAC).

Or $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sin(\alpha)\\\sin(\alpha)\\-\sin(\alpha)\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}.\vec{u}=1\times\sin(\alpha)+1\times\sin(\alpha)+0\times(-\sin(\alpha))=2\sin(\alpha)$

$\alpha\in]0;\pi[$ donc $\sin(\alpha)\neq0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{u}\neq0$ et $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal au plan (FAC).

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

N est égal au nombre de combinaisons de 2 éléments d'un ensemble de 8 éléments donc :

$$N=\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8\times7}{2}=28\neq\frac{8^2}{2}=32$$