

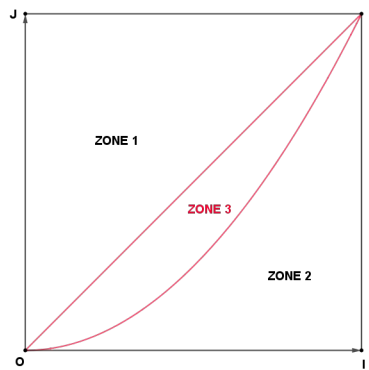
Exercice 2

6 points

Dans le repère orthonormé (O;I;J) ci-dessous, on a représenté :

- la droite d'équation  $y=x$  ;
- la droite d'équation  $y=1$  ;
- la droite d'équation  $x=1$  ;
- la parabole d'équation  $y=x^2$  .

On peut ainsi partager le carré OIKJ en trois zones.



Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Démontrer les résultats dans le tableau ci-dessous.

| ZONE | ZONE 1        | ZONE 2        | ZONE 3        |
|------|---------------|---------------|---------------|
| AIRE | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

Partie B : un premier jeu

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à  $\frac{1}{6}$  .

- Si la fléchette sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée.  
Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces.  
Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 » ;

G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à  $\frac{2}{9}$  .
3. On sait que le joueur a gagné.  
Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 ?

**Partie C : un second jeu**

Un joueur, appelé joueur n°1, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone.

Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE 3, le joueur gagne 3 euros.

On note  $X_1$  la variable aléatoire donnant le gain du joueur n°1.

On note respectivement  $E(X_1)$  et  $V(X_1)$  l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X_1$ .

**1.a.** Calculer  $E(X_1)$ .

**1.b.** Montrer que  $V(X_1) = \frac{5}{9}$ .

**2.** Un joueur n°2 et un joueur n°3 jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur n°1.

On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres.

On note  $X_2$  et  $X_3$  les variables aléatoires donnant les gains des joueurs n°2 et n°3.

On note  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = X_1 + X_2 + X_3$ .

**2.a.** Déterminer la probabilité que l'on ait  $Y=9$ .

**2.b.** Calculer  $E(Y)$ .

**2.c.** Justifier que  $V(Y) = \frac{5}{3}$ .

**CORRECTION**

**Partie A**

La ZONE 1 est le triangle OJK rectangle isocèle en J.

L'aire de la ZONE 1, en unité d'aire, est :  $\frac{OJ \times JK}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

La ZONE 2 est la partie de plan comprise entre la courbe représentative de la fonction carré, l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .

L'aire de la ZONE 2, en unité d'aire, est :  $\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

La ZONE 3 est le triangle OIK diminuée de la ZONE 2 donc l'aire de la ZONE 3, en unité d'aire, est égale à :  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$ .

**Partie B : premier jeu**

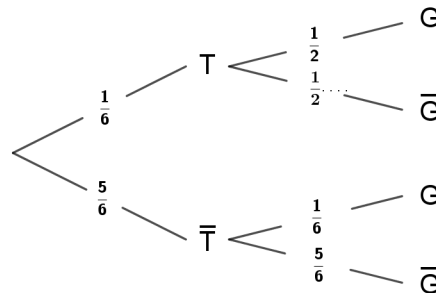
1. L'énoncé précise :

$P(T) = \frac{1}{6}$  donc  $P(\bar{T}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$P_T(G) = \frac{1}{2}$  donc  $P_T(\bar{G}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P_{\bar{T}}(G) = \frac{1}{6}$  donc  $P_{\bar{T}}(\bar{G}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant la formule des probabilités totales

$P(G) = P(G \cap T) + P(G \cap \bar{T}) = P(T) \times P_T(G) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(G)$

$P(G) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

3. On nous demande de calculer :  $P_G(T)$

$P_G(T) = \frac{P_G(T)}{P(G)} = \frac{1}{2} : \frac{2}{9} = \frac{1}{12} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{8}$

**Partie C : second jeu**

1. La loi de probabilité de  $X_1$  est :

|              |               |               |               |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_1$        | 1             | 2             | 3             |
| $P(X_1=x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$1.a. E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{3+4+3}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$1.b. V(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2$$

$$E(X_1^2) = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{3} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} = \frac{3+8+9}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$V(X_1) = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{30-25}{9} = \frac{5}{9}$$

2.a. Les variables aléatoires  $X_1$ ;  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes et ont la même loi de probabilité.

$$P(Y=9) = P(X_1=3) \times P(X_2=3) \times P(X_3=3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

$$2.b. Y = X_1 + X_2 + X_3$$

$$\text{donc } E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = 5$$

2.c. Les variables  $X_1$ ;  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes donc :

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{5}{3}$$