

## Exercice 3

5 points

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right).$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \ln(9)$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f(2 \ln(2)) = 2 \ln(2)$ .
3. Montrer que  $u_1 = \ln(5)$ .
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  
 $2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$ .
5. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.
- 6.a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $X^2 - X - 2 = 0$ .
- 6.b. En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation :  
 $e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$ .
- 6.c. En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = x$ .
- 6.d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**CORRECTION**

$$1. f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right) \quad \left(e^{\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \quad f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 2} > 0$$

$f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$2. e^{\frac{2\ln(2)}{2}} = e^{\ln(2)} = 2$$

$$f(2\ln(2)) = \ln(2+2) = \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$$

$$3. u_1 = f(u_0) = f(\ln(9))$$

$$\ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3) \quad \frac{\ln(9)}{2} = \frac{2\ln(3)}{2} = \ln(3) \quad e^{\frac{\ln(9)}{2}} = e^{\ln(3)} = 3$$

$$u_1 = f(\ln(9)) = \ln(3+2) = \ln(5)$$

4. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

Initialisation

Pour  $n=0$   $u_0 = \ln(9)$   $u_1 = \ln(5)$   $2\ln(2) = \ln(4)$

La fonction  $\ln$  est croissante sur  $]0; +\infty[$  donc  $2\ln(2) \leq u_1 \leq u_0$ .

La propriété est vérifiée pour  $n=0$ .

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel  $n$ , on suppose que  $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$  et on doit démontrer que  $2\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ .

Si  $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$  alors  $f(2\ln(2)) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$  car  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Or  $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$   $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$   $f(u_n) = u_{n+1}$ .

Donc  $2\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

5. Pour tout entier naturel  $n$   $u_{n+1} \leq u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est décroissante et  $2\ln(2) \leq u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est minorée par  $2\ln(2)$ .

Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite  $(u_n)$  converge.

$$6.a. X^2 - X - 2 = 0 \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = 3^2$$

$$X_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad X_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \mathcal{S} = \{-1; 2\}.$$

$$6.b. e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} = X \\ X^2 - X - 2 = 0 \end{cases}$$

$$e^{\frac{x}{2}} = -1 \quad \text{il n'y a pas de solution}$$

$$e^{\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln(2) \Leftrightarrow x = 2\ln(2)$$

$$\mathcal{S} = \{2\ln(2)\}.$$

$$6.c. f(x) = x \Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right) = x \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} + 2 = e^x \Leftrightarrow e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

Donc l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$  est :  $2\ln(2)$ .

- 6.d. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} = f(u_n)$  .  
 $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  donc  $f(L) = L$ .  
 $L$  est une solution de l'équation  $f(x) = x$  et  $L = 2\ln(2)$  .