

Exercice 4
5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f .

2. Montrer que, pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

4.a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4.b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude 0,01.

4.c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x).$$

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O .

On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe \mathcal{C}_g d'abscisse x .

On note OM la distance entre les points O et M .

5.a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x .

5.b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt $]0;+\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .

5.c. La valeur minimale de la distance OM , lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0;+\infty[$ est appelée distance du point O à la courbe \mathcal{C}_g . On note d cette distance.

Exprimer d à l'aide de α .

CORRECTION

1. $x \in]0; +\infty[\quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \times \ln(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

2. $u(x) = \ln(x) \quad u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = x^2 \quad v'(x) = 2x$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)} \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

3. $x \in]0; +\infty[\quad x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - 2\ln(x)$.

$$1 - 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2\ln(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

$$1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > 2\ln(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \ln(x) \Leftrightarrow \ln(\sqrt{e}) > \ln(x) \Leftrightarrow \sqrt{e} > x > 0$$

$1 - 2\ln(x) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{e} < x$ sur
Tableau de variation de f

| | | | |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| x | 0 | \sqrt{e} | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | + | 0 - |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $f(\sqrt{e})$ | 1 |

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} + 1 = \frac{1}{2e} + 1.$$

4.a. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; \sqrt{e}]$ à valeurs dans $\left] -\infty; \frac{1}{2e} + 1 \right]$.

$0 \in \left] -\infty; \frac{1}{2e} + 1 \right]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre réel α appartenant à $]0; \sqrt{e}]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

• f est décroissante $[\sqrt{e}; +\infty[$ à valeurs dans $\left] 1; 1 + \frac{1}{2e} \right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[\sqrt{e}; +\infty[$.

• Conclusion :

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4.b. En utilisant la calculatrice on obtient :

$$0,65 < \alpha < 0,66$$

4.c. Si $0 < x < \alpha < \sqrt{e}$ alors $f(x) < f(\alpha) = 0$.

Si $\alpha < x \leq \sqrt{e}$ alors $f(\alpha) = 0 < f(x)$.

Si $\sqrt{e} < x$ alors $f(x) > 1 > 0$

On donne le signe de la fonction f sous la forme d'un tableau.

| | | | |
|------|---|----------|-----------|
| x | 0 | α | $+\infty$ |
| f(x) | | - | 0 |
| | | | + |

5.a. $x \in]0; +\infty[$ $g(x) = \ln(x)$ $M(x; \ln(x))$
 $OM^2 = x^2 + \ln^2(x)$

5.b. $x \in]0; +\infty[$ on note : $h(x) = OM^2 = x^2 + \ln^2(x) > 0$ et $OM = \sqrt{h(x)}$
 $h'(x) = 2x + 2\ln(x) \times \frac{1}{x} = 2x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) = 2x \times f(x)$

Le signe de $h'(x)$ sur $]0; +\infty[$ est le signe de $f(x)$.

On donne les variations de h sous la forme d'un tableau

| | | | |
|-------|---|----------|-----------|
| x | 0 | α | $+\infty$ |
| h'(x) | | - | 0 |
| | | | + |
| h(x) | | | |

h admet un minimum pour $x = \alpha$.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc $OM = \sqrt{h(x)}$

admet les mêmes variations que h sur $]0; +\infty[$.

La valeur minimale de OM est : $\sqrt{h(\alpha)}$.

5.c. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha) = -\alpha^2$

$h(\alpha) = \alpha^2 + \ln^2(\alpha) = \alpha^2 + (-\alpha^2)^2 = \alpha^2 + \alpha^4 = \alpha^2(\alpha^2 + 1)$

$d = \alpha \sqrt{\alpha^2 + 1}$

On donne une figure non demandée.



