## Exercice 1 — 5 points

Une équipe américaine a cartographié pour la première fois les allergies alimentaires chez l'enfant aux États-Unis en 2020. L'étude, publiée dans la revue *Clinical Pediatries,* révèle une différence nette entre les zones rurales et les zones urbaines.
On sait qu'en 2020, 17 % de la population des États-Unis habite en zone rurale et 83 % en zone urbaine.
L'étude menée montre que parmi les enfants des États-Unis vivant en zone rurale, il y en a 6,2 % qui sont atteints d'allergie alimentaire.
L'étude révèle aussi que 9 % des enfants des États-Unis sont atteints d'allergie alimentaire.
Pour un évènement $E$ quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\bar{E}$ son évènement contraire.
**Sauf mention contraire, les probabilités seront données sous forme exacte.**

**Partie A**

On interroge au hasard un enfant dans la population des États-Unis et on note :
. $R$ l'évènement : « l'enfant interrogé habite en zone rurale » ;
. $A$ l'évènement interrogé est atteint d'allergie alimentaire ».

**1.** Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Cet arbre pourra être complété par la suite.

**2.a.** Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire.
**2.b.** En déduire la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire.
**2.c.** L'enfant interrogé habite en zone urbaine.
Quelle est la probabilité qu'il soit atteint d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à $10^{-4}$.

**Partie B**

On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.
On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On note $X$ la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.

**1.** Justifier que la variable $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**2.** Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à $10^{-4}$.

**Partie C**

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.
L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires $A_1, A_2, \dots, A_{20}$. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.

On considère la variable aléatoire : $M_{20}=\dfrac{A_1+A_2+\dots+A_{20}}{20}$.

**1.** Que représente la variable aléatoire $M_{20}$ dans le contexte de l'exercice ?

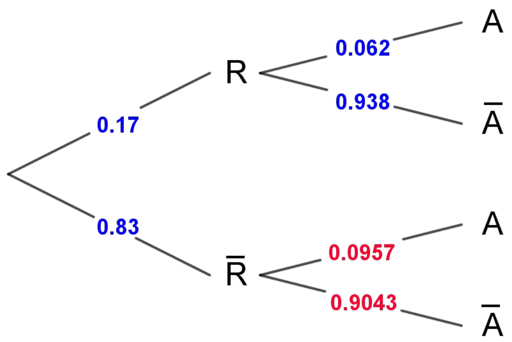
**2.** Déterminer l'espérance et la variance de $M_{20}$.

**3.** Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que $P(2<M_{20}<6)>0{,}97$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

**Partie A**

**1.** L'énoncé précise que : $P(R)0{,}13$ et $P(\bar{R})=0{,}83$ et $P_R(A)=0{,}062$ donc $P_R(\bar{A})=1-0{,}062=0938$ .
On obtient l'arbre pondéré suivant
(remarque : les résultats inscrits en rouge seront démontrer dans la question 2.c.)




**2.a.** $P(R\cap A)=P(R)\times P_R(A)=0{,}17\times 0{,}062=0{,}01054$

**2.b.** En utilisant le théorème des probabilités totales :
$P(A)=P(R\cap A)+P(\bar{R}\cap A)$
$P(\bar{R}\cap A)=P(A)-P(R\cap A)=0{,}09-0{,}01054=0{,}07946$

**2.c.** $P_{\bar{R}}(A)=\dfrac{P(\bar{R}\cap A)}{P(\bar{R})}=\dfrac{0{,}07946}{0{,}83}\simeq 0{,}0957$ à $10^{-4}$ près.
Donc $P_{\bar{R}}(\bar{A})=1-0{,}0957=0{,}9043$ à $10^{-4}$ près.

**Partie B**

**1.** On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard un enfant des États-Unis.
Succès $S=A$ : « cet enfant est atteint d'allergie alimentaire » $P(S)=P(A)=0{,}09$ .
Le choix des 100 enfants est considéré comme des tirages successifs indépendants avec remise, c'est à dire on effectue 100 épreuves de bernoulli indépendantes.
$X$ est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 100 épreuves, la loi de probabilité de $X$ est la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}09$ .

**2.** En utilisant la calculatrice , on obtient :
$P(X\geqslant 10)=0{,}4125$ à $10^{-4}$ près.

**Partie C**

**1.** $M_{20}$ est l'âge moyen d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants.

**2.** $E(M_{20})=\dfrac{E(A_1)+E(A_2)+\ldots+E(A_{20})}{20}=\dfrac{20\times E(A_1)}{20}=E(A_1)=4$
car les variables aléatoires $A_1,\ A_2,\ldots A_{20}$ ont la même espérance mathématique : 4.
Ces variables aléatoires sont indépendantes et ont même variance : 2,25.
$V(M_{20})=\dfrac{1}{20^2}[V(A_1)+V(A_2)+\ldots+V(A_{20})]=\dfrac{1}{20^2}\times 20\times V(A_1)=\dfrac{2{,}25}{20}$

**3.** $2<M_{20}<6 \quad\Leftrightarrow\quad -2<M_{20}-E(M_{20})<2 \quad\Leftrightarrow\quad |M_{20}-E(M_{20})|<2$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne pour $t \in ]0;+\infty[$

$$P(|M_{20}-E(M_{20})| \geqslant t) \leqslant \frac{V(M_{20})}{t^2}$$

Pour $t=2$ et $V(M_{20})=\frac{2{,}25}{20}$

$$P(|M_{20}-E(M_{20})| \geqslant 2) \leqslant \frac{2{,}25}{4\times 20}=\frac{2{,}25}{80}=\frac{9}{320}$$

Pour l'évènement contraire

$$P(|M_{20}-E(M_{20})| < 2) > 1-\frac{9}{320}=\frac{311}{320} \simeq 0{,}9729 > 0{,}97$$

Dans le contexte de l'exercice :

Plus de 97 % des cas, les premiers symptômes apparaissent entre 2 et 6 ans.