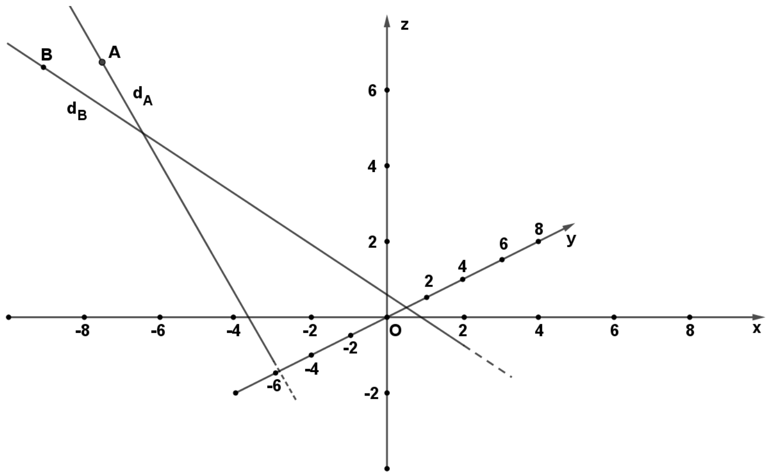
Exercice 2 — 5 points

Deux avions sont en approche d'un aéroport.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z=0$.
L'unité des axes correspond à 1 km.
On modélise les avions par des points.



L'avion Alpha transmet à la tour sa position en $A(-7;1;7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_B passant par le point B dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=-11+5t\\y=-5+t\\z=11-4t\end{cases}$ où t décrit $\mathbb{R}$.

1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.

$2x-y-3z+8=0$

2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.

2.b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision ?

3.a. Démontrer que l'avion Alpha passe par la position $E(-3;-1;1)$.

3.b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_E passant par E et de la droite d_A est : $2x-y-3z+8=0$

3.c. Vérifier que le point $F(-1;-3;3)$ est le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B.

3.d. Calculer la valeur exacte de la distance EF puis vérifier que cela correspond à une distance de 3464 m.

4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1852 m).
Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée ?

CORRECTION

1. $d_B : \begin{cases} x=-11+5t \\ y=-5+t \\ z=11-4t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

S est le point de d_B tel que $z=0$ donc $11-4t=0 \Leftrightarrow t=\frac{11}{4}=2{,}75$.

$x_S=-11+5\times\frac{11}{4}=\frac{11}{4}=2{,}75 \qquad y_S=-5+\frac{11}{4}=\frac{-9}{4} \qquad S\left(\frac{11}{4};-\frac{9}{4};0\right)$

(on a placé le point S sur la figure donnée en fin de correction).

2.a. d_A est la droite passant par $A(-7;1;7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z)$ appartient à $d_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=s\vec{u} \quad (s\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+s\vec{u} \quad (s\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-7+2s \\ y=1-s \\ z=7-3s \end{cases} \quad s\in\mathbb{R}$

2.b. On modélise les avions par des points donc les avions entrent en collision si et seulement si les droites d_A et d_B sont sécantes.

$d_A : \begin{cases} x=-7+2s \\ y=1-s \\ z=7-3s \end{cases} \quad s\in\mathbb{R} \qquad d_B : \begin{cases} x=-11+5t \\ y=-5+t \\ z=11-4t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

On doit résoudre le système : $\begin{cases} -7+2s=-11+5t & (1) \\ 1-s=-5+t & (2) \\ 7-3s=11-4t & (3) \end{cases}$

On considère d'abord le système constitué des équations (1) et (2).

$\begin{cases} -7+2s=-11+5t \\ 1-s=-5+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s-5t=-4 \\ -s-t=-6 \end{cases}$

On obtient : .

$0\times s-7t=-4-6\times2=-16 \Leftrightarrow t=\frac{16}{7}$ et $7s-0\times t=-4+6\times5t=26 \Leftrightarrow s=\frac{26}{7}$

On considère maintenant l'équation (3).

$7-3s=7-3\times\frac{16}{7}=\frac{49-48}{7}=\frac{1}{7}$ et $11-4t=11-4\times\frac{26}{7}=\frac{77-104}{7}=\frac{27}{7}$

$\left(\frac{16}{7};\frac{26}{7}\right)$ n'est pas solution de l'équation (3).

Le système considéré n'admet pas de solution et les droites d_A et d_B n'ont pas de points communs donc les avions ne peuvent pas entrer en collision.

3.a. $d_A : \begin{cases} x=-7+2s \\ y=1-s \\ z=7-3s \end{cases} \quad s\in\mathbb{R} \qquad E(-3;-1;1)$

On remarque que pour $s=2$ dans la représentation paramétrique de d_A, on obtient les coordonnées de E donc $E\in d_A$.

3.b. P_E est le plan perpendiculaire à d_A passant par E donc P_E est le plan passant par $E(-3;-1;1)$ et de vecteur normal $\vec{u}$.

$M(x;y;z) \qquad \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x+3\\y+1\\z-3\end{pmatrix} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$

M appartient à $P_E \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{EM}=0 \Leftrightarrow 2(x+3)-(y+1)-3(z-1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+6-y-1-3z+3=0 \Leftrightarrow 2x-y-3z+8=0$

$P_E : \ 2x-y-3z+8=0$

3.c. On détermine l'intersection du plan P_E et de la droite d_B en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2x-y-3z+8= & 0 \\ x=-11+5t \\ y=-5+t \\ z=11-4t \end{cases}$$

on obtient : $2(-11+5t)-(-5+t)-3(11-4t)+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad -22+10t+5-t-33+12t+8=0$

$\Leftrightarrow \quad 21t-42=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=2$

$x=-11+10=-1 \qquad y-5+2=-3 \qquad z=11-8=3$

donc le point $F(-1;-3;3)$ est le point d'intersection de P_E et d_B .

3.d. $E(-3;-1;1) \qquad F(-1;-3;3)$

$EF^2=(-1+3)^2+(-3+1)^2+(3-1)^2=4+4+4=12$

$EF=\sqrt{12}\simeq 3{,}464$ km (au millème près)

donc $EF=3464$ m (à 1 mètre près).

4. $3\text{ milles}=3\times 1852\text{ m}=5556\text{ m}$

$5556>3464$

Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au m^me instant alors la distance de sécurité n'est pas respectée.

On joint une figure non demandée.