

Exercice 1

5 points

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \text{ et, pour } n \geq 1, f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n , on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1.a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$.

1.b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous.

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	0

2. Justifier par l'le calcul que le point $A(1; e^{-1})$ appartient à la courbe \mathcal{C}_n .

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0; 1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier

naturel n par :
$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{100}$

1.a. Donner une interprétation graphique de I_n .

1.b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Calculer I_0 .

3.a. Soit n un entier naturel.

Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.

3.b. En déduire que pour entier naturel n , on a : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera L .

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

6.a. Démontrer que si $L > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.

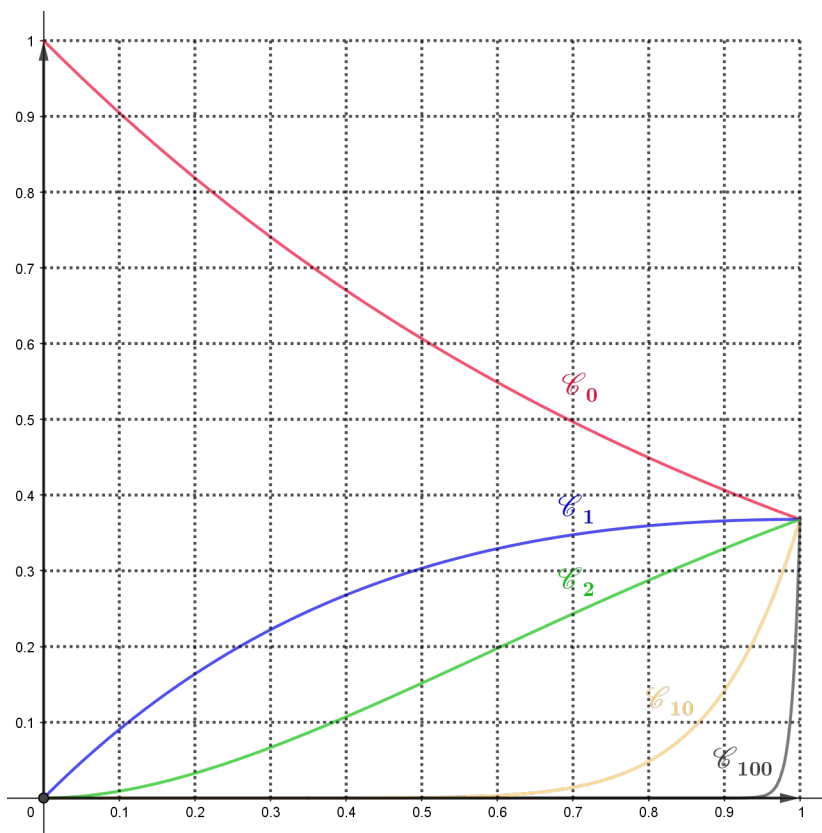
6.b. Démontrer que $L = 0$. On pourra utiliser la question 6.a.

On donne ci-dessous le script de la fonction mystere , écrite en langage Python.
 On a importé la constante e .

```
def mystere(n):
    l=1-1/e
    L=[]
    for i in range(n):
        l=(i+1)*l-1/e
        L.append(l)
    return L
```

7. Que renvoie mystere(100) dans le contexte de l'exercice ?

ANNEXE : exercice 3



CORRECTION

Partie A

1.a. n est un entier naturel non nul, x est un réel de l'intervalle $[0; +\infty[$

$$(x^n)' = n x^{n-1} \quad \text{et} \quad (e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$f'_n(x) = n x^{n-1} e^{-x} + x^n (-e^{-x}) = (n-x) x^{n-1} e^{-x}$$

1.b. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0; +\infty[$ et tout entier naturel non nul n , on a :

$$e^{-x} > 0 \quad \text{et} \quad x^{n-1} \geq 0.$$

Le signe de $f'_n(x)$ est le signe de $n-x$.

$$n-x=0 \Leftrightarrow x=n \quad n-x>0 \Leftrightarrow n>x \quad n-x<0 \Leftrightarrow n<x$$

donc f_n est croissante sur $[0; n]$ et décroissante sur $[n; +\infty[$.

$$f_n(n) = n^n e^{-n} = \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad f_n(0) = 0^n \times e^0 = 0$$

En utilisant les croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

On a justifié tous les éléments du tableau donné.

2. $f_0(x) = e^{-x}$ donc $f_0(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Pour tout entier naturel n , non nul on a : $f_n(1) = 1^n \times e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Pour tout entier naturel n , le point $A\left(1; \frac{1}{e}\right)$ appartient à la courbe \mathcal{C}_n .

Partie B

1.a. Pour tout entier naturel n et tout nombre réel appartenant à $[0; 1]$, on a : $f_n(x) \geq 0$ et f_n est continue sur $[0; 1]$ donc I_n est l'aire, en unité d'aire, du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_n et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

1.b. Lorsque n devient grand, la courbe \mathcal{C}_n devient très proche de l'axe des abscisses donc l'aire I_n tend vers zéro. Conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2. $f_0(x) = e^{-x}$ $F_0(x) = -e^{-x}$ F_0 est une primitive de f_0 sur $[0; 1]$.

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 \quad I_0 = 1 - \frac{1}{e}$$

3.a. Pour tout entier naturel n et tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $x^n \geq 0$ et $x-1 \leq 0$ donc : $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ et $x^{n+1} \leq x^n$. On obtient : $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.

3.b. Pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-x} \leq x^n e^{-x} \quad \text{car} \quad e^{-x} > 0 \quad \text{soit} \quad 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

En utilisant la positivité de l'intégrale et des propriétés de l'intégrale et de la relation

$$\text{d'ordre : } 0 \leq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \Leftrightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

4. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 or toute suite croissante et minorée est convergente donc la suite (I_n) est convergente.

On note L la limite de la suite (I_n) , on a $0 \leq L \leq 1 - \frac{1}{e}$.

$$5. I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$$

$$u(x) = x^{n+1} \quad u'(x) = (n+1)x^n \quad v'(x) = e^{-x} \quad v(x) = -e^{-x}$$

u et v sont dérivables et u' et v' sont continues.

En utilisant la formule d'intégration par parties :

$$I_{n+1} = [-x^{n+1} e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{-x}) dx$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

6.a. Si $L > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = L$

Il y a contradiction avec $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$ (les deux membres de l'égalité ont des limites différentes).

6.b. On a $0 \leq L \leq 1 - \frac{1}{e}$ et on n'a pas $L > 0$ donc $L = 0$.

7. Théoriquement mystere(100) retourne les 101 premières valeurs approchées de I_n .

Remarque

Si on exécute le programme donné, on obtient assez rapidement des valeurs négatives pour I_n ou des valeurs supérieures à 1 pour I_n , ce qui est absurde car $0 \leq I_n \leq 1$.

Dans l'exécution on utilise à un moment une valeur approchée du nombre e soit par excès soit par défaut.

On se propose de donner un exemple simple pour expliquer ce résultat.

La calculatrice donne : $\frac{1}{e} \simeq 0,3678794412$.

Pour l'exemple on conserve 4 décimales : $0,3678 < \frac{1}{e} < 0,3679$.

On se propose aussi de calculer la valeur exacte des premiers termes de la suite (I_n) .

Pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.

$$I_0 = 1 - \frac{1}{e} \quad I_1 = 1 \times I_0 - \frac{1}{e} = 1 \times 1 - \frac{2}{e} \quad I_2 = 2 \times I_1 - \frac{1}{e} = 1 \times 2 - 2 \times \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 1 \times 2 - \frac{5}{e}$$

$$I_3 = 3 \times I_2 - \frac{1}{e} = 1 \times 2 \times 3 - 3 \times \frac{5}{e} - \frac{1}{e} = 1 \times 2 \times 3 - \frac{16}{e} = 3! - \frac{16}{e}$$

$$I_4 = 4 \times I_3 - \frac{1}{e} = 4! - \frac{64}{e} - \frac{1}{e} = 4! - \frac{65}{e}$$

Pour tout entier naturel n : $I_n = n! - \frac{a_n}{e}$

(a_n) est la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout entier naturel n $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$.

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 16 \quad a_4 = 65 \quad a_5 = 326 \quad a_6 = 1957 \quad a_7 = 13700$$

$$I_7 = 7! - \frac{13700}{e} = 5040 - \frac{13700}{e}$$

Si on choisit : $\frac{1}{e} = 0,3679$

$$I_7 = 5040 - 13700 \times 0,3678 = 5040 - 5040,23 = -0,23 \quad (\text{résultat faux})$$

Si on choisit : $\frac{1}{e} = 0,3678$

$$I_7 = 5040 - 13700 \times 0,3678 = 5040 - 5098,86 = 1,14 \quad (\text{résultat faux})$$

Si on choisit : $\frac{1}{e} = 0,367879441$

$$I_8 = 8! - \frac{a_8}{e} \quad 8! = 40320 \quad a_8 = 109601 \quad I_9 = 9! - \frac{a_9}{e} \quad 9! = 362880 \quad a_9 = 986410$$

$$I_{10} = 10! - \frac{a_{10}}{e} \quad 10! = 3628800 \quad a_{10} = 9864101$$

$$I_{10} = 3628800 - 9864101 \times 0,367879441 = 3628800 - 362799,962 = 0,038$$

Résultat compatible avec l'aire sous la courbe de \mathcal{C}_{10} . Mais le résultat serait faux pour I_{100} .