Exercice 4 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice , les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle : (E): $y'=\frac{1}{2}y+4$

Affirmation 1 :

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=k e^{\frac{1}{2}x}-8$ avec $k\in\mathbb{R}$.

2. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.
On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.
Affirmation 2 :
Il y a 297024 possibilités pour former une telle équipe.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n=\frac{n}{2+\cos(n)}$

Affirmation 3 :
La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points : $A(1;1;2)$, $B(5;-1;8)$ et $C(2;1;3)$.
Affirmation 4 :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=10$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 30°.

5. On considère une fonction h définie sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0;+\infty[$ par : $h''(x)=x\ln(x)-3x$.
Affirmation 5 :
La fonction h est convexe sur $[e^3;+\infty[$.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

Si a est un réel non nul donné et b un réel donné alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\,e^{ax}-\frac{b}{a}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Pour (E) $a=\frac{1}{2}$ et $b=4$ donc $-\frac{b}{a}=-8$.

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\,e^{\frac{1}{2}x}-8$ avec $k\in\mathbb{R}$.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

Il faut choisir simultanément 3 filles parmi 18, il y a $\binom{18}{3}$ possibilités. $\binom{18}{3}=816$.

Il faut choisir simultanément 3 garçons parmi 14, il y a $\binom{14}{3}$ possibilités. $\binom{14}{3}=364$.

En utilisant le principe multiplicatif, il y a $816\times 364=297024$ possibilités de former une équipe de 3 filles et 3 garçons.

3. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

Pour tout entier naturel $-1\leqslant\cos(n)\leqslant 1$ donc $1\leqslant 2+\cos(n)\leqslant 3$ et $1\geqslant\frac{1}{2+\cos(n)}\geqslant\frac{1}{3}$

On obtient : $\frac{n}{3}\leqslant\frac{n}{2+\cos(n)}=v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3}=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

$A(1;1;2)$ $B(5;-1;8)$ $C=(2;1;3)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4\times 1+(-2)\times 0+6\times 1=4+6=10$

$AB^2=4^2+(-2)^2+6^2=16+4+36=56=4\times 14$ $AB=2\sqrt{14}$

$AC^2=1^2+1^2=2$ $AC=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})\Leftrightarrow 10=2\sqrt{14}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC})\Leftrightarrow 10=4\sqrt{7}\times\cos(\widehat{BAC})$

$\Leftrightarrow\cos(\widehat{BAC})=\frac{10}{4\sqrt{7}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\widehat{BAC}\neq 30°$.

5. Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $h'''(x)=x(\ln(x)-3)$ donc le signe de $h''(x)$ et le signe de (ln(x)-3).

Si $e^3\leqslant x$ alors $\ln(e^3)\leqslant\ln(x)$ $\Leftrightarrow$ $3\leqslant\ln(x)$ $\Leftrightarrow$ $0\leqslant\ln(x)-3$

donc si $e^3\leqslant x$ alors $h''(x)\geqslant 0$ et h est convexe sur $[e^3;+\infty[$.