Exercice 1 5 points

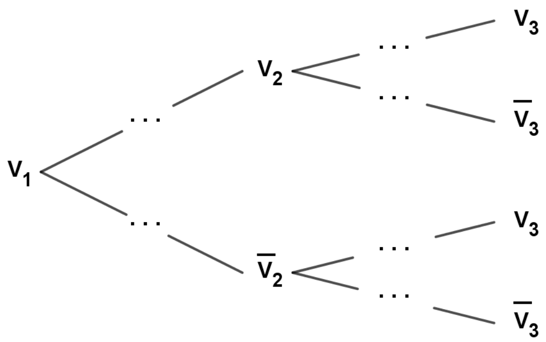
Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.
Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est à dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 devient 1).
La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

. V_n l'évènement : « la $n^{\text{ième}}$ machine détient la valeur 1 » ;
. $\overline{V_n}$ l'évènement : « la $n^{\text{ième}}$ machine détient la valeur 0 ».

1.a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



1.b. Démontrer que $P(V_3)=0{,}82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
1.c. Sachant que la troisième machine àreçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $p_n = P(V_n)$.
La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.
2.a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$p_{n+1} = 0{,}8\,p_n + 0{,}1$
2.b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$
2.c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction simulation qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.
On donne ci-après le script incomplet de cette fonction.
On rappelle que l'instruction rand() renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle [0;1[.


```
1    def simulation(n):
2      donnee=1
3      liste=[donnee]
4      for k in range(n):
5        if rand()<0.1
6          donnee=1-donnee
7        liste.append(donnee)
8      return liste
```

Par exemple, simulation(3) peut renvoyer [1,0,0,1]. Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machine ;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine ;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième machine.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.

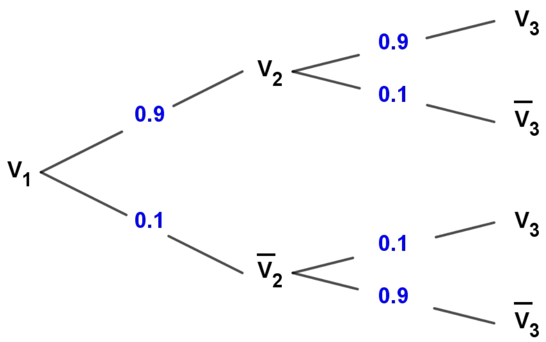
2. Calculer la probabilité que simulation(4) renvoie la liste [1,1,1,1,1] et la probabilité que simulation(6) renvoie la liste [1,0,1,0,0,1,1].

CORRECTION

Partie A

1.a. $P_{V_1}(V_2)=0{,}9$ $P_{V_1}(\bar{V}_2)=0{,}1$ $P_{V_2}(V_3)=0{,}9$ $P_{V_2}(\bar{V}_3)=0{,}1$ $P_{\bar{V}_2}(V_3)=0{,}1$ $P_{\bar{V}_2}(\bar{V}_3)=0{,}9$

On obtient pour arbre pondéré :



1.b. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(V_3)=P(V_2\cap V_3)+P(\bar{V}_2\cap V_3)=P(V_2)\times P_{V_2}(V_3)+P(\bar{V}_2)\times P_{\bar{V}_2}(V_3)$

$P(V_3)=0{,}9\times 0{,}9+0{,}1\times 0{,}1=0{,}81+0{,}01=0{,}82$

Après deux transmissions il y a 82 % de chance d'avoir 1.

1.c. On nous demande de calculer $P_{V_3}(V_2)$

$P_{V_3}(V_2)=\dfrac{P(V_2\cap V_3)}{P(V_3)}=\dfrac{0{,}81}{0{,}82}\simeq 0{,}988$ à 10^{-3} près.

2.a. $p_{n+1}=P(V_{n+1})=P(V_n\cap V_{n+1})+P(\bar{V}_n\cap V_{n+1})=P(V_n)\times P_{V_n}(V_{n+1})+P(\bar{V}_n)\times P_{\bar{V}_n}(V_{n+1})$

$p_{n+1}=p_n\times 0{,}9+(1-p_n)\times 0{,}1=0{,}9\,p_n+0{,}1-0{,}1\,p_n$

$p_{n+1}=0{,}8\,p_n+0{,}1$

2.b. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, on ait : $p_n=0{,}5\times 0{,}8^{n-1}+0{,}5$

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$ $p_1=1$ et $0{,}5\times 0{,}8^{1-1}+0{,}5=0{,}5\times 0{,}8^0+0{,}5=0{,}5\times 1+0{,}5=1$

La propriété est vérifiée pour $n=1$

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel, non nul , n on suppose que $p_n=0{,}5\times 0{,}8^{n-1}+0{,}5$ et on doit démontrer que $p_{n+1}=0{,}5\times 0{,}8^n+0{,}5$.

Si $p_n=0{,}5\times 0{,}8^{n-1}+0{,}5$ alors $p_{n+1}=0{,}8\,p_n+0{,}1=0{,}8\times(0{,}5\times 0{,}8^{n-1}+0{,}5)+0{,}1=0{,}5\times 0{,}8^n+0{,}8\times 0{,}5+0{,}1$

$p_{n+1}=0{,}5\times 0{,}8^n+0{,}4+0{,}1=0{,}5\times 0{,}8^n+0{,}5$.

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer, que pour tout entier naturel non nul n , on a : $p_n=0{,}5\times 0{,}8^{n-1}+0{,}5$

2.c. $0<0{,}8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^{n-1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=0{,}5$

Lorsque n prend de très grandes valeurs alors après n transmissions on a la même probabilité d'avoir 0 ou 1.

Partie B

1. ligne 5 : if rand()<0,1 :

. Si le nombre t obtenu au hasard est compris entre 0 et 0,1 $(0\leqslant t<0{,}1)$ alors on applique l'instruction de la ligne 6.

c'est à dire si donnee=1 alors donnee=0 et si donnee=0 alors donnee=1.

Donc la transmission est contraire.

- Sinon (c'est à dire $0 \leqslant t < 1$) alors on ne tient pas compte de l'instruction de la ligne 6.
  Donc la transmission est fidèle.
- Le choix de t est au hasard, la loi est uniforme.
  $P(0 \leqslant t < 0{,}1) = \frac{0{,}1 - 0}{1} = 0{,}1$ $\qquad$ $P(0{,}1 \leqslant t < 1) = \frac{1 - 0{,}1}{1} = 0{,}9$

2. [1,1,1,1,1] 4 transmissions fidèles la probabilité est : $0{,}9^4 \simeq 0{,}656$ à 10^{-3} près.
[1,0,1,0,0,1,1] 6 transmissions : 2 fidèles et 4 contraires
la probabilité est : $0{,}9^2 \times 0{,}1^4 = 8{,}1 \times 10^{-5} \simeq 0$ à 10^{-3} près.