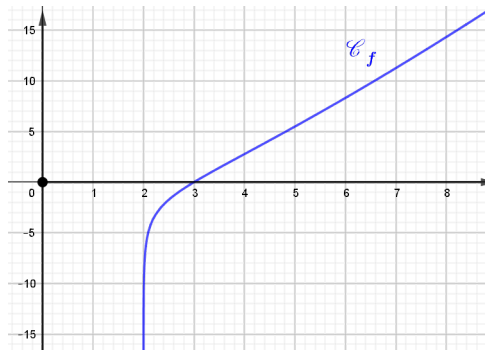


Exercice 2

5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par : $f(x)=x \ln(x-2)$.
 Une partie de la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f , ses limites aux bornes de son ensemble de définition, ainsi que d'éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $]2;+\infty[$.
3. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$. Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1 ?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2;+\infty[$: $f'(x)=\ln(x-2)+\frac{x}{x-2}$.
5. On considère la fonction g définie sur $]2;+\infty[$ par $g(x)=f'(x)$.
 - 5.a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2;+\infty[$, on a : $g'(x)=\frac{x-4}{(x-2)^2}$.
 - 5.b. On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$.
 En déduire le tableau de variation de la fonction g sur $]2;+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g .
 - 5.c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2;+\infty[$, $g(x)>0$.
 - 5.d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2;+\infty[$.
6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2;+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

CORRECTION

1. Conjectures :

- La fonction f est croissante sur $]2;+\infty[$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- $x=2$ est une asymptote verticale à \mathcal{C}_f .

$$2. f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \ln(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x=0 \text{ ou } \ln(x-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \ln(x-2)=\ln(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x-2=1 \end{cases}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \{x=3 \quad \mathcal{S}=\{3\}\}.$$

$$3. f(x)=x \ln(x-2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} x=2 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2)=0 \text{ et } x-2 > 0$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$$

On retrouve la conjecture sur la limite en 2 et celle sur l'asymptote à \mathcal{C}_f : $x=2$.

4. f est dérivable sur $]2;+\infty[$

$$u(x)=x \quad u'(x)=1 \quad v(x)=\ln(x-2) \quad v'(x)=\frac{1}{x-2} \quad (uv)' = u'v + uv' \quad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \left(\frac{1}{x-2}\right) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$$

5.a. $g(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$ pour tout x réel de l'intervalle $]2;+\infty[$

$$g \text{ est dérivable sur }]2;+\infty[\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1 \times (x-2) - x \times 1}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x-2-2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

5.b. Si $x > 2$ alors le signe de $g'(x)$ est le signe de $(x-4)$.

x	2	4	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$			$+\infty$

$$g(4) = \ln(2) + \frac{4}{4-2} = \ln(2) + 2 \text{ valeur exacte du minimum de } g \text{ sur }]2;+\infty[$$

5.c $g(4) = \ln(2) + 2 \simeq 2,69 > 0$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]2;+\infty[$:

$$g(x) \geq g(4) > 0.$$

5.d. $g(x) = f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$

$$6. g'(x) = f''(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

x	2	4	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
convexité de f	f est concave		f est convexe

$$f(4) = 4 \ln(2)$$

Le point $I(4; 4 \ln(2))$ est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .

7. Il faut déterminer le nombre de solution de l'équation : $f'(x) = 3 \Leftrightarrow g(x) = 3$.

Or g admet un minimum absolu sur $]2; +\infty[$: $g(4) \simeq 2,69 < 3$.

g est continue et strictement décroissante sur $]2; 4]$ à valeurs dans $[g(4); +\infty[$.

3 appartient à $[g(4); +\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un réel unique α appartenant à $]2; 4]$ tel que $g(\alpha) = 3$.

$\alpha \neq 4$ car $g(4) \neq 3$.

Raisonnement analogue sur $[4; +\infty[$, il existe β unique appartenant à $[4; +\infty[$ tel que $g(\beta) = 3$.

Conséquence

Il existe 2 valeurs de x pour lesquelles la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3.