Exercice 3 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points suivants :
$A(1;3;0)$, $B(-1;4;5)$, $C(0;1;0)$ et $D(-2;2;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

3.a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
3.b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :
$2x-y+z+1=0$
3.c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}B\times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.
5.a. Montrer que $DH=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.
5.b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
5.c. On considère la droite d de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x= 1-2k \\ y= -3k \\ z= 1+k \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$
La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

CORRECTION

1. $A(1;3;0)$ $B(-1:4;5)$ $C(0;1;0)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{AB}=\lambda\vec{AC}$ donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C déterminent un plan.

2. $\vec{AB}.\vec{AC}=-2\times(-1)+1\times(-2)+5\times 0=2-2+0=0$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A.

3. Δ est la droite passant par $D(-2;2:1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

3.a. La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) par exemples $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

$\vec{AB}.\vec{u}=(-2)\times 2+1\times(-1)+5\times 1=-4-1+5=0$

$\vec{AC}.\vec{u}=(-1)\times 2+(-2)\times(-1)+0\times 1=-2+2+0=0$

donc Δ est orthogonale au plan (ABC).

3.b. (ABC) est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

$A(1;3;0)$ $M(x;y;z)$ $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\\z-0\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$M\in(ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow (x-1)\times(2)+(y-3)\times(-1)+z\times 1=0 \Leftrightarrow 2x-2-y+3+z=0$
$\Leftrightarrow 2x-y+z+1=0$

3.c. $D(-2;2;1)$ $M(x;y;z)$ $\vec{DM}\begin{pmatrix}x+2\\y-2\\z-1\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$M\in\Delta$ si et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{DM}=t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=2t\\y-2=-t\\z-1=t\end{cases} t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2t+2\\y=-t+2\\z=t+1\end{cases} t\in\mathbb{R}$

4. Le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point d'intersection de Δ et (ABC).

On résout le système :

$\begin{cases}2x-y+z+1=0\\x=2t-2\\y=-t+2\\z=t+1\end{cases}$ on obtient : $2\times(2t-2)-(-t+2)+t+1+1=0 \Leftrightarrow 4t-4+t-2+t+2=0$

$\Leftrightarrow 6t-4=0 \Leftrightarrow t=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$x=2\times\frac{2}{3}-2=-\frac{2}{3}$ $y=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$ $z=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

donc $H\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

5.a. $DH^2=\left(-\frac{2}{3}+2\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2+\left(\frac{5}{3}-1\right)^2=\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{24}{9}$

$DH=\sqrt{\frac{24}{9}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

5.b. On choisit comme base du tétraèdre ABCD le triangle ABC et DH est la hauteur relative à cette base.

L'aire (en unité d'aire) du triangle ABC rectangle en A est $\frac{1}{2}AB\times AC$.

$AB^2=(-2)^2+1^2+5^2=4+1+25=30$ $AB=\sqrt{30}$

$AC^2=(-1)^2+(-2)^2+0^2=1+4+0=5$ $AC=\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{30}\times\sqrt{5}=\frac{1}{2}\sqrt{150}=\frac{1}{2}\times 5\sqrt{6}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

Le volume V (en unité de volume) du tétraèdre $ABCD$ est égal à :

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{6}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{10\times 6}{18}=\frac{10}{3}$$

6. d est la droite passant par $E(1;0;1)$ eet de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{u}.\vec{v}=2\times(-2)+(-1)\times(-3)=1\times 1=-4+3+1=0$

donc la droite d est parallèle au plan (ABC).

Le point E n'appartient pas au plan (ABC) car $2\times(1)-0+1+1=2+1+1=4\neq 0$.

La droite d est strictement parallèle au plan (ABC).

Remarque :

On peut aussi déterminer l'intersection de (ABC) et d. On obtient alors l'ensemble vide.