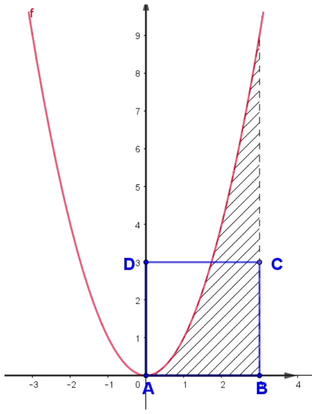
Exercice 4 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifier. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E=\{1;2;34;5;6;7\}$ et $F=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.
Affirmation 1 :
Il y a davantage de 3-uplets d'éléments d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F.

2. Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a représenté la fonction carrée, notée f, ainsi que le carré ABCD de côté 3.



Affirmation 2 :
La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.

3. On considère l'intégrale J ci-dessous :

$$J=\int_1^2 x\ln(x)\,dx$$

Affirmation 3 :
Une intégration par parties permet d'obtenir : $J=\dfrac{7}{11}$.

4. Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(E):\quad y'=2y-e^x$$

Affirmation 4 :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x+e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

5. Soit x donné dans $[0;1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n=(x-1)e^n+\cos(n)\ .$$

Affirmation 5 :
La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

Le nombre de 3-uplets d'éléments distincts d'un ensemble de 7 éléments (ou le nombre d'arrangements de 3 éléments d'un ensemble de 7 éléments) est égal à : $7\times6\times5=210$.

Le nombre de combinaisons de 4 éléments d'un ensemble de 10 éléments est égal à :

$$\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!6!}=\frac{1\,10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}=10\times3\times7=210\,.$$

Il n'y a pas davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons de 4 éléments de F.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

L'aire du carré ABCD est égale à : $3\times3=9$ U.A.

La fonction carrée est positive et continue sur $[0;3]$, donc l'aire en U.A. de la partie de plan hachurée est égale à : $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{3^3}{3}-0=9$ U.A.

3. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

$$I=\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$u(x)=\ln(x)\qquad u'(x)=\frac{1}{x}\qquad v'(x)=x\qquad v(x)=\frac{x^2}{2}$

u et v sont dérivables sur [1;2] et u' et v' sont continues sur [1;2].

En utilisant la formule d'intégration par parties.

$$I=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=2\ln(2)-0-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=2\ln(2)-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=2\ln(2)-1+\frac{1}{4}=2\ln(2)-\frac{3}{4}$$

En utilisant la calculatrice :

$I=2\ln(2)-\frac{3}{4}\simeq0{,}63629\qquad \frac{7}{11}\simeq0{,}63636\qquad I\neq\frac{7}{11}$

4. Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

$f(x)=e^x+e^{2x}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x)=e^x+2e^{2x}$

Pour tout réel x, $2f(x)-e^x=2e^x+2e^{2x}-e^x=e^x+2e^{2x}$ donc $f'(x)=2f(x)-e^x$ et f est solution de (E).

5. Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

Pour tout entier naturel n : $-1\leqslant\cos(n)\leqslant1$

donc pour tout entier naturel n : $u_n=(x-1)e^n+\cos(n)\leqslant(x-1)e^n+1$

$x\in[0;1[$ donc $0\leqslant x<1$ et $x-1<0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}e^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(x-1)e^n=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}((x-1)e^n+1)=-\infty$

Or pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant(x-1)e^n+1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$