

Exercice 1

6 points

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

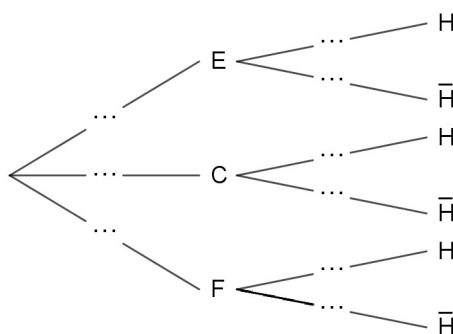
- . 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- . 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- . 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- . 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- . E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- . C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- . F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- . H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.

3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». On arrondira le résultat au millième.

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un candidat ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». On arrondira le résultat au millième.

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise.

On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».

- 3.a. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0,5875^n$.
- 3.b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 %.

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- . Abonnement « Étudiant » : 5€ par mois ;
- . Abonnement « Classique » : 10€ par mois ;
- . Abonnement « Famille » : 16€ par mois ;
- . Abonnement « Écoute hors-ligne » : 2€ de plus par mois, quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y .
2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de Y .
3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.
4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y , arrondie au centième.
5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme.
On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.
- 5.a. Calculer la variance de Z .
- 5.b. Un responsable affirme que, si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.
Justifier cette affirmation.

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

• $P(E)=0,25$ $P(F)=0,15$ donc $P(C)=1-0,25-0,15=0,60$

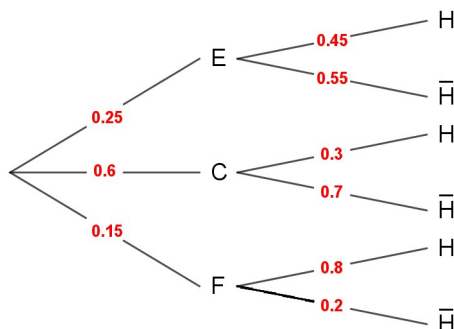
• $P_E(H)=0,45$ donc $P_E(\bar{H})=1-0,45=0,55$

• $P_C(H)=0,30$ donc $P_C(\bar{H})=1-0,30=0,70$

• $P(F \cap H)=0,12$

$$P_F(H) = \frac{P_H(F \cap H)}{P(F)} = \frac{0,12}{0,15} = 0,8 \quad \text{donc} \quad P_F(\bar{H}) = 1 - 0,8 = 0,2$$

• On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(E \cap H) = 0,25 \times 0,45 = 0,1125$

3. En utilisant la formule des probabilités totales.

$$P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H)$$

$$P(E \cap H) = 0,1125 \quad P(F \cap H) = 0,12$$

$$P(C \cap H) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

$$P(H) = 0,1125 + 0,12 + 0,18 = 0,4125$$

4. On nous demande $P_H(E)$.

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,1125}{0,4125} = 0,014 \quad (\text{on arrondit au millième}).$$

Partie B

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,4125)$.

2. $P(X=0) = (1-0,4125)^8 = 0,5875^8 = 0,014$ (on arrondit au millième).

3.a. A_n est l'évènement : « au-moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » »

$\bar{A}_n$ est l'évènement : « aucun abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » ».

$$P(\bar{A}_n) = 0,5875^n \quad \text{donc} \quad P(A_n) = q_n = 1 - 0,5875^n$$

3.b. $q_n \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,5875^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,001 \geq 0,5875^n$

$\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,001) \geq \ln(0,5875^n) \Leftrightarrow \ln(0,001) \geq n \times \ln(0,5875)$$

$$0 < 0,5875 < 1 \quad \text{donc} \quad \ln(0,5875) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \leq n \quad \text{Or} \quad \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \simeq 12,99$$

n est un entier naturel.

Le plus petit entier naturel n tel que $q_n \geq 0,999$ est 13.

Partie C

1. Les 6 valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y sont :
 5 (pour l'évènement $E \cap \bar{H}$); $7=5+2$ (pour l'évènement $E \cap H$); 10 (pour l'évènement $C \cap \bar{H}$)
 $12=10+2$ (pour l'évènement $C \cap H$); 16 (pour l'évènement $F \cap \bar{H}$); $18=16+2$ (pour l'évènement $F \cap H$)
2. $P(X=5)=P(E \cap \bar{H})=0,25 \times 0,55=0,1375$
 $P(X=7)=P(E \cap H)=0,25 \times 0,45=0,1125$
 $P(X=10)=P(C \cap \bar{H})=0,6 \times 0,7=0,42$
 $P(X=12)=P(C \cap H)=0,6 \times 0,3=0,18$
 $P(X=16)=P(F \cap \bar{H})=0,15 \times 0,2=0,03$
 $P(X=18)=P(F \cap H)=0,15 \times 0,8=0,12$
 On donne la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y=y_i)$	0.1375	0.1125	0.42	0.18	0.03	0.12

3. $E(Y)=0,1375 \times 5 + 0,1125 \times 7 + 0,42 \times 10 + 0,18 \times 12 + 0,03 \times 16 + 0,12 \times 18 = 10,475$
 En moyenne les abonnés doivent payer environ 10,50€ par mois.
4. En utilisant la calculatrice, on obtient :
 $E(Y^2)=123,43$ et $E(Y^2)-[E(Y)]^2=13,70$

5.a. $\sigma(Z)=2$ donc $V(Z)=2^2=4$

5.b. $E(Z)=9$ donc :

$$6 < Z < 12 \Leftrightarrow -3 < Z - 9 < 3 \Leftrightarrow |Z - 9| < 3 \Leftrightarrow |Z - E(Z)| < 3$$

et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne une majoration de l'évènement contraire :

$$P(|Z - E(Z)| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\text{donc } P(|Z - E(Z)| < 3) \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \simeq 0,55 > 0,50$$

L'affirmation est justifiée.