

Exercice 2

4 points

Le perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population des perches-soleil dans un étang naturel.

On estime que, dans cet étang, le nombre des perches-soleil s'élève à 4000 individus au 1^{er} janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise, le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n) .

Pour un entier naturel n , u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1^{er} janvier de l'année $2025 + n$.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 4$$

$$\text{pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$$

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n , $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1^{er} janvier 2026 donné par ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = 4 - \frac{4}{x}$

2.a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2.b. Démontrer que pour tout entier naturel n : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

2.c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.

2.d. Justifier que $L = 2$.

2.e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante.

3. On considère le script Python ci-dessous.

3.a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $[2; 4]$.

Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
def population(s):
    u=4
    n=0
    while ... :
        u=...
        n=...
    return n
```

3.b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2,2)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1^{er} janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

. la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

$$p(0) = 4$$

. la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = 2$ où y est une fonction de la variable réelle t .

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est : $p(t) = 22e^{-t} + 2$.
3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

CORRECTION

Partie A : étude d'un modèle discret

1. $u_1 = 4 - \frac{4}{4} = 3$ est le nombre de perches-soleil au 1^{er} janvier 2026

2.a. h est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$h(x) = 4 - \frac{4}{x} \quad h'(x) = -\left(\frac{4}{x}\right)' \quad \left(\frac{4}{x}\right)' = \frac{-4 \times 1}{x^2} = -\frac{4}{x^2} \quad \text{donc} \quad h'(x) = \frac{4}{x^2} > 0$$

h est croissante sur $]0; +\infty[$.

2.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

Initialisation

Pour $n=0$, $u_0=4$ et $u_{0+1}=u_1=3$ donc $2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$ et la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n , on suppose que :

$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ et on doit démontrer que $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$.

Si $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ alors $h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(4)$ car h est croissante sur $]0; +\infty[$.

$$h(2) = 4 - \frac{4}{2} = 4 - 2 = 2 ; \quad h(u_{n+1}) = u_{n+2} ; \quad h(u_n) = u_{n+1} ; \quad h(4) = 4 - \frac{4}{4} = 4 - 1 = 3 \leq 4$$

donc $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a :

$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

2.c. Pour tout entier naturel n , $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que la suite (u_n) converge.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

2.d. L est une solution de l'équation $h(L) = L$ (car h est continue sur $]0; +\infty[$)

$$4 - \frac{4}{L} = L \Leftrightarrow 4L - 4 = L^2 \Leftrightarrow L^2 - 4L + 4 = 0 \Leftrightarrow (L-2)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 2.$$

2.e. Ce modèle ne prévoit pas une élimination de l'espace envahissant car le nombre perches-soleil sera toujours supérieur ou égal à 2000.

3.a.

```
def population(s):
    u=4
    n=0
    while u>=s:
        u= 4 - 4/u
        n= n + 1
    return n
```

3.b. En utilisant une calculatrice (par exemple avec un tableur) on obtient : $u_9=2,2$ et $u_{10}=2,182$.

La commande `population(2,2)` renvoie 10.

En 2035 le nombre de perches-soleil sera pour la première année inférieur à 2200.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. (E) $y' + y = 2 \Leftrightarrow$ (E) $y' = -y + 2$

Équation du type : $y' = a y + b$ avec $a = -1$ et $b = 2$

Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(t) = k e^{-t} - \frac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(t) = k e^{-t} + 2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. $p(t) = k e^{-t} + 2$ avec $t \in [0; +\infty[$
 $p(0) = 4$ donc $4 = k e^0 + 2 = k + 2 \Leftrightarrow k = 2$
 $p(t) = 2e^{-t} + 2$ avec $t \in [0; +\infty[$

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t) = -\infty$ et $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$

On obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 2$ donc à long terme le nombre de perches-soleil sera voisin de 2000.

Le modèle continu ne prévoit pas l'élimination de l'espèce envahissante.