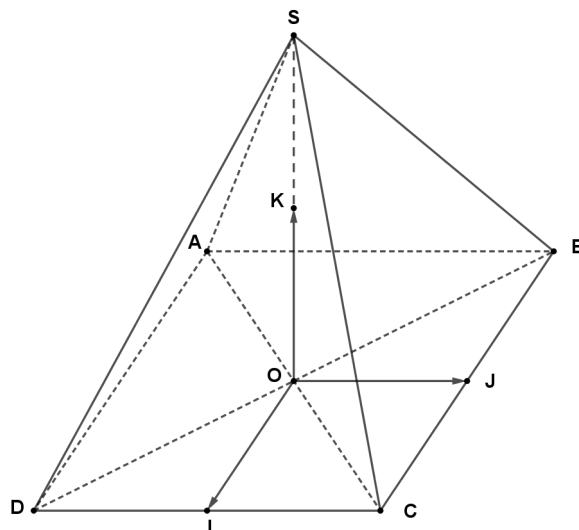


Exercice 3

5 points

Dans cet exercice l'unité est le centimètre.

On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

. $AB=BC=CD=DA=OS=2\text{ cm}$

. I est le milieu de $[CD]$, J est le milieu de $[BC]$ et K est le milieu de $[OS]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{OI}; \vec{OJ}; \vec{OK})$.

On admet que $B(-1;1;0)$, $C(1;1;0)$ et $S(0;0;2)$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Donner les coordonnées des points A et D.
2. Calculer le produit scalaire $\vec{SC} \cdot \vec{SB}$.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC)

1. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.a. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).

1.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est : $2y + z - 2 = 0$.

2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).

2.a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2.b. Calculer les coordonnées du point H.

2.c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

1.a. Calculer le volume de la pyramide SABCD.

1.b. En déduire que le volume de la pyramide OCBS est égal à $\frac{2}{3} \text{ cm}^3$.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC.

3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$.

CORRECTION

Partie A

1. $A(-1; -1; 0)$ $D(1; -1; 0)$

2. $S(0; 0; 2)$ $B(-1; 1; 0)$ $C(1; 1; 0)$

$$\overrightarrow{SC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{SB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2) = -1 + 1 + 4 = 4$$

3. $SC^2 = 1^2 + 1^2 + (-2)^2 = 6$ $SC = \sqrt{6}$

$$SB^2 = (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 6$$
 $SB = \sqrt{6}$

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = 4 = SC \times SB \times \cos(\widehat{BSC}) = 6 \cos(\widehat{BSC})$$

$$\cos(\widehat{BSC}) = 4 \times 6 = \frac{2}{3}.$$

En utilisant la calculatrice : $\widehat{BSC} = 48,2^\circ$

Partie B

1.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (SBC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC) par exemples $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$.

$$\overrightarrow{SC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{SB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SC} \cdot \vec{n} = 1 \times 0 + 1 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$$

$$\overrightarrow{SB} \cdot \vec{n} = -1 \times 0 + 1 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (SBC).

1.b. (SBC): $0 \times x + 2y + z + d = 0$

$B(-1; 1; 0)$ appartient au plan (SBC) donc $0 \times (-1) + 2 \times 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

(SBC): $2y + z - 2 = 0$.

2.a. Si H est le projeté orthogonal de O sur (SBC) alors $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal au plan (SBC) donc $\vec{n}$ est un vecteur de (OH) et O est un point de (OH).

On obtient pour représentation paramétrique de la droite (OH) est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2.b. H est le point d'intersection de (SBC) et (OH).

On résout le système $\begin{cases} 2y + z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ on obtient $2 \times 2t + t - 2 = 0 \Leftrightarrow 5t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$

donc $x_H = 0$; $y_H = \frac{4}{5}$; $z_H = \frac{2}{5}$ $H\left(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

2.c. $OH^2 = 0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{4}{25} = \frac{20}{25}$ $OH = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{\sqrt{4 \times 5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}.$

Partie C

1.a. Pour la pyramide SABCD la base est le carré ABCD de côté 2 cm (donc d'aire $\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \text{ cm}^2$)

et de hauteur OS=2 cm. Le volume de la pyramide SABCD est : $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3} \text{ cm}^3$.

1.b. Pour la pyramide OCBS la base est le triangle OCB d'aire $\mathcal{A}_{OCB} = \frac{1}{4} \mathcal{A}_{ABCD} = 1 \text{ cm}^2$ et de hauteur

$$OS = 2 \text{ cm} \text{ donc } V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3} \text{ cm}^3.$$

2. Le triangle SBC a pour base $BC = 2 \text{ cm}$ et pour hauteur SJ (le triangle SBC est isocèle et de sommet principal S).

$$S(0;0;2) \quad J(0;1;0) \quad SJ^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5 \quad SJ = \sqrt{5}$$

$$\mathcal{A}_{SBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \text{ cm}^2.$$

3. Pour la pyramide OSBC la base est SBC d'aire $\sqrt{5} \text{ cm}^2$ et de hauteur OH.

$$\text{Donc } V_{OSBC} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times OH \quad \text{or} \quad V_{OSBC} = \frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{et } \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times OH \Leftrightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}.$$

Remarque

$$S(0;0;2) \quad J(0;1;0) \quad H\left(0;\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right) \quad \vec{SJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{SH} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{SH} = \frac{4}{5} \vec{SJ}$$

Les points S ; H et J sont alignés.

