

Exercice 4

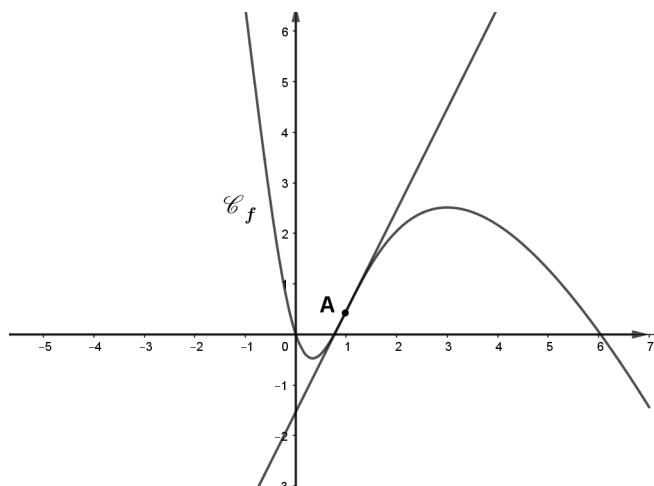
5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$

et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.
- 3.a. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$.
- 3.b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 4.a. Démontrer que pour tout réel, $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.
- 4.b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$$
 - 5.a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
 - 5.b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
 - 5.c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.

CORRECTION

1. Par lecture graphique le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ et f est convexe sur $]-\infty; 1]$ et concave sur $[1; +\infty[$.

2. $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$

Conséquence : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

3.a. Si $x > 1$ alors $\ln(x^2 + 1) = \ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$f(x) = 10 \ln(x) + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 3x$

$f(x) = x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 3\right) + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

3.b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(10 \frac{\ln(x)}{x} - 3\right) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(10 \frac{\ln(x)}{x} - 3\right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 5 \ln(1) = 0$

conséquence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

4.a. $f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2 + 1} - 3 = \frac{10x - 3x^2 - 3}{x^2 + 1} = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$

4.b. Le signe de $f'(x)$ est le signe de $N(x) = -3x^2 + 10x - 3$

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64 = 8^2$

$x_1 = \frac{-10 - 8}{2 \times (-3)} = \frac{18}{6} = 3$ $x_2 = \frac{-10 + 8}{-6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
f'(x)	—	0	+	0	—
f(x)					

5.a. On admet que : $f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$

Le signe de $f''(x)$ est le signe de $T(x) = -10x^2 + 10 = -10(x^2 + 1) = -10(x+1)(x-1)$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f''(x)	—	0	+	0	—
convexité de f	concave		convexe		concave

$A(1; 5 \ln(2) - 3)$ et $B(-1; 5 \ln(2) + 3)$ sont des sur points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$ la fonction f est concave donc la conjecture de la question 1 est fausse.

5.b. $f'(1) = 2$ $A(1; 5 \ln(2) - 3)$

L'équation réduite de la tangente (T_A) à $\mathcal{C}_f$ au point A est :

$y - 5 \ln(2) + 3 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x + 5 \ln(2) - 5$

5.c. La fonction f est concave sur $[1; +\infty[$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes sur $[1; +\infty[$, en particulier en dessous de (T_A) .

$$\text{Si } x \geq 1 \text{ alors } f(x) \leq 2x + 5\ln(2) - 5 \Leftrightarrow 5\ln(x^2 + 1) - 3x \leq 2x + 5\ln(2) - 5$$

$$\Leftrightarrow 5\ln(x^2 + 1) \leq 5x + 5\ln(2) - 5 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$$

Remarque

On effectue un changement de repère (le nouveau repère n'est pas orthonormé)

On détermine l'équation de (T_B) : $f'(-1) = -8$ $B(-1; 5\ln(2) + 3)$

$$(T_B): y = -8x + 5\ln(2) - 5$$

