

Exercice 1

4 points

Un super marché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.

Il a été constaté que :

- . 91 % du stock est commercialisable ;
- . 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- . parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

On choisit au hasard une tomate du stock.

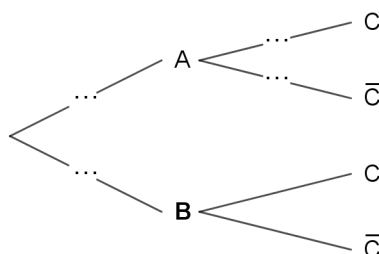
On désigne par :

- . A l'évènement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- . B l'évènement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- . C l'évènement « La tomate est commercialisable ».

Pour un évènement quelconque E, on note $P(E)$ la probabilité de E.

Partie A

1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.



2.a. Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A.

2.b. Démontrer que $P_B(C) = 0,85$.

2.c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Partie B

On rappelle que 9 % du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

1.a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.

1.b. Déterminer la probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables.

On donnera la valeur arrondie au millième.

1.c. Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.

On donnera une valeur arrondie au millième.

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n , la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$.

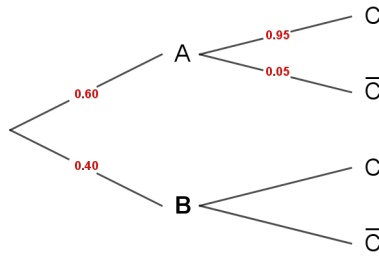
On admet que la variable aléatoire X_n , suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09.

- 2.a.** Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n .
- 2.b.** Démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$.
- 2.c.** Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables.
Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A

1. $P(A)=0,6$ $B=\bar{A}$ donc $P(B)=1-0,6=0,4$
 $P_A(C)=0,95$ $P_A(\bar{C})=1-0,95=0,05$



2.a. $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$

2.b. $P(C) = 0,91$

En utilisant le théorème des probabilités totales : $P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$
 $0,91 = 0,57 + P(B \cap C)$ donc $P(B \cap C) = 0,91 - 0,57 = 0,34$

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{0,34}{0,4} = \frac{34}{40} = 0,85$$

2.c. $P(\bar{C}) = 1 - 0,91 = 0,09$ $P_A(\bar{C}) = 0,05$ $P(A \cap \bar{C}) = P(A) \times P_A(\bar{C}) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$

$$P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$$

$$P(B \cap \bar{C}) + P(B \cap C) = P(B) \quad 0,4 \quad P(B \cap C) = 0,34$$

$$P(B \cap \bar{C}) = 0,4 - 0,34 = 0,06 \quad P(\bar{C}) = 0,09$$

$$P_{\bar{C}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,06}{0,09} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P_{\bar{C}}(B) = 2 P_{\bar{C}}(A) \quad \text{Le fournisseur d'achat a donc raison.}$$

Partie B

- 1.a. X suit la loi binomiale de paramètres 15 et 0,09.

1.b. $P(X=2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times (1-0,09)^{13} \simeq 0,250$.

1.c. En utilisant la calculatrice : $P(X \leq 2) = 0,853$.

2.a. $E(X_n) = np = 0,09n$ $E(F_n) = E\left(\frac{1}{n} \times X_n\right) = \frac{1}{n} E(X_n) = 0,09$

$$V(X_n) = npq = n \times 0,09 \times 0,91 = 0,0819n \quad V(F_n) = V\left(\frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{0,0819}{n}$$

- 2.b. Si X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev précise que

pour tout $\delta > 0$ on a : $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

$$0,04 < F_n < 0,14 \Leftrightarrow 0,04 - 0,09 < F_n - 0,09 < 0,14 - 0,09 \Leftrightarrow -0,05 < F_n - E(F_n) < 0,05$$

$$\Leftrightarrow |F_n - E(F_n)| < 0,05$$

Pour $\delta = 0,05$ on a : $P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,05) \leq \frac{V(F_n)}{0,05^2} = \frac{0,0819}{n \times 0,0025} = \frac{32,76}{n}$.

Pour l'évènement contraire : $P(|F_n - E(F_n)| < 0,05) \leq 1 - \frac{32,76}{n}$

Soit $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$

1.c. $n=500$ la fréquence constatée est : $\frac{55}{500}=0,11$ et $0,04 < 0,11 < 0,14$

$$1 - \frac{32,76}{500} = \frac{467,24}{500} = 0,93448$$

Le résultat est conforme car pour chaque échantillon de 500 tomates il y a plus de 93 % de chance d'obtenir une fréquence comprise entre 0,04 et 0,14.