

Exercice 2

6 points

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2.a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que, pour tout réel x , on a : $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

2.b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie A**.

Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$. On admet que la suite (v_n) est bien définie.

3.a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.

3.b. En déduire une expression de (v_n) en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$ pour tout entier naturel n .

3.c. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

```
from math import*

def termes(p):
    u ...
    S=0
    L=[]
    for i in range(p):
        S ...
        u ...
        L.append(S)
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande `L=[]` crée une liste vide ;
- la commande `L.append(S)` ajoute , à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.

3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lors que n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

$$x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x \Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 2x - x\sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x(2 - \sqrt{1+x^2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } 2 - \sqrt{1+x^2} = 0) \\ 2 - \sqrt{1+x^2} = 0 &\Leftrightarrow 2 = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 4 = 1+x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}) \\ \mathcal{P} &= \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.a. \quad u(x) &= 2x \quad u'(x) = 2 \quad v(x) = \sqrt{1+x^2} \quad v'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} \\ u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= 2\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \\ f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

2.b. Pour tout nombre réel x , $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

Initialisation

$$u_0 = 1 \quad u_1 = f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{or } 1 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{3} \text{ donc } 1 \leq u_0 \leq u_1 < \sqrt{3}.$$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ et on doit démontrer que $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}$.

Si $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ alors $f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3})$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or $f(1) = \sqrt{2}$ et $1 \leq \sqrt{2}$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$.

Or toute suite croissante et majorée est convergente donc (u_n) est convergente.

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. On a $1 \leq L \leq \sqrt{3}$ car $u_0 = 1$ et la suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$.

L est une solution de l'équation $f(x) = x$ et $L \geq 1$ alors $L = \sqrt{3}$.

3. Pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n}$.

3.a. Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}}$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ donc $u_{n+1}^2 = \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}$

$$3 - u_n^2 = 3 - \frac{4u_n^2}{1+u_n^2} = \frac{3+3u_n^2-4u_n^2}{1+u_n^2} = \frac{3-u_n^2}{1+u_n^2}$$

$$\text{donc } v_{n+1} = \frac{4u_n^2}{3-u_n^2} = 4v_n.$$

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \frac{u_0^2}{3-u_0^2} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = 0,5$.

3.b. Pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times 4^n = 0,5 \times 4^n$

$$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2} \Leftrightarrow (3-u_n^2) \times v_n = u_n^2 \Leftrightarrow 3v_n - u_n^2 v_n = u_n^2 \Leftrightarrow 3v_n = u_n^2 \times (1+v_n)$$

$$\Leftrightarrow u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n} \Leftrightarrow u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}} = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1+0,5 \times 4^n}}$$

3.c. Pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{\frac{1,5}{4^{-n} + 0,5}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{-n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{\frac{1,5}{0,5}} = \sqrt{3}$$

Partie C : étude de la convergence de la somme des termes

1.

```
from math import*
```

```
def termes(p):
```

```
    u =1
```

```
    S=0
```

```
    L=[]
```

```
    for i in range(p):
```

```
        S= S + u2
```

```
        u=  $\frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}$ 
```

```
        L.append(S)
```

```
    return L
```

2. Pour tout entier naturel k on a : $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$ donc $1 \leq u_k^2 \leq 3$

(car la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$).

$$1 \leq u_0^2 \leq 3, 1 \leq u_1^2 \leq 3, \dots, 1 \leq u_k^2 \leq 3, \dots, 1 \leq u_{n-1}^2 \leq 3$$

Par somme des n double inégalités on obtient : $n \leq S_n \leq 3n$.

3. Pour tout entier naturel non nul n , on a : $n \leq S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

Si n est un entier naturel non nul alors $n \leq S_n \leq 3n$ donc $\frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0$.