

Exercice 3

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère :

. les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$

. la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

. le plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ contient le point $C(1; 1; 1)$ mais pas le point A .

2.a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x + y + 2z - 14 = 0$.

2.b. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ contient le point B mais pas le point C .

3. On considère le point $D(3; 2; 3)$.

3.a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.

3.b. Justifier que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.

3.c. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

3.d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

4.a. Vérifier que les coordonnées du point H sont : $\left(\frac{73}{29}; -\frac{4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.

4.b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.

4.c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

CORRECTION

1. La représentation paramétrique de Δ précise que : Δ est la droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par le point $C(1;1;1)$. Donc le point C appartient à Δ .

$$A(4;2;2) \quad \begin{cases} 4=1+2t \\ 2=1+t \\ 2=1+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1,5 \\ t=1 \\ t=0,5 \end{cases} \text{ donc le système n'admet pas de solution et } A \text{ n'appartient pas à } \Delta.$$

- 2.a. $\mathcal{P}$ est un plan perpendiculaire à Δ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}: 2x+y+2z+d=0$.
 A appartient à $\mathcal{P}$ donc $2 \times 4 + 2 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow 8 + 2 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -14$.

$$\mathcal{P}: 2x + y + 2z - 14 = 0.$$

- 2.b. $B(5;-2;3) \quad 2 \times 5 - 2 + 2 \times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$ donc B appartient au plan $\mathcal{P}$.
 $C(1;1;1) \quad 2 \times 1 + 1 + 2 \times 1 - 14 = 2 + 1 + 2 - 14 = -9 \neq 0$ donc C n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

3. $D(3;2;3)$

- 3.a. D est le projeté orthogonal de C sur le plan $\mathcal{P}$ si et seulement si D appartient au plan $\mathcal{P}$ et que $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur au plan $\mathcal{P}$ c'est à dire colinéaire au vecteur $\vec{u}$.

$$2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0 \text{ donc } D \text{ appartient au plan } \mathcal{P}.$$

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CD} = \vec{u} \text{ et } D \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur le plan } \mathcal{P}.$$

- 3.b. Les points A ; B et D appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-4} \text{ donc les points } A ; B \text{ et } D \text{ ne sont pas alignés, on a donc } (ABD) = \mathcal{P}.$$

Or C n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$ donc les points A ; B ; C et D ne sont pas coplanaires.

- 3.c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times (-1) - 4 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$.

- 3.d. Le triangle ABD est rectangle en A donc $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD$.

$$AB^2 = 1^2 + (-4)^2 + 1^2 = 1 + 16 + 1 = 18 = 2 \times 9 \quad AB = 3\sqrt{2}$$

$$AD^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \quad AD = \sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$$

$\Delta = (CD)$ est perpendiculaire au plan (ABD) donc CD est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ relative à la base ABD .

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad CD^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 4 + 1 + 4 = 9 \quad CD = 3$$

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABD} \times CD = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3$$

- 4.a. $H\left(\frac{73}{29}; -\frac{4}{29}; \frac{51}{29}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur (BC) si et seulement si H appartient à (BC) et que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} \frac{44}{29} \\ -\frac{33}{29} \\ \frac{22}{29} \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CH} = \frac{11}{29} \overrightarrow{CB} \text{ et } H \text{ appartient à } (BC).$$

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{44}{29} \\ -\frac{62}{29} \\ -\frac{7}{29} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AH} = 4 \times \left(-\frac{43}{29}\right) - 3 \times \left(-\frac{62}{29}\right) + 2 \times \left(-\frac{7}{29}\right) = \frac{-172 + 186 - 14}{29} = 0$$

donc le point H est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

4.b. $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH$

$$CB^2 = 4^2 + (-3)^2 + 2^2 = 16 + 9 + 4 = 29 \quad CB = \sqrt{29}$$

$$AH^2 = \frac{(-43)^2 + (-62)^2 + (-7)^2}{29^2} = \frac{1849 + 3844 + 49}{29^2} = \frac{5742}{29^2}$$

$$5741 = 29 \times 198 \quad \text{donc} \quad AH^2 = \frac{198}{29} \quad \text{et} \quad 198 = 9 \times 22 \quad AH = \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{22}}{2}$$

4.c. La distance du point D au plan (ABC) est la hauteur h du tétraèdre ABCD relative à la base ABC.

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times h$$

$$3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times h$$

$$h = \frac{6}{\sqrt{22}} = \frac{6\sqrt{22}}{22} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$