

Exercice 4

5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x(\ln x)^2$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.
 - 2.a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$.
 - 2.b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - 3.a. Démontrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
 - 3.b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - 3.c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1]$.
4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
 - 4.a. Justifier que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, cette équation admet une unique solution.
On note α cette solution.
 - 4.b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$.
5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.
 - 5.a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x) dx$.
 - 5.b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln(a))^2 - \int_a^1 x \ln x dx$$
 - 5.c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$
 - 5.d. Démontrer la limite de $\int_a^1 f(x) dx$ quand a tend vers 0 .

CORRECTION

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x))^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a. Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$4(g(\sqrt{x}))^2 = 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 \text{ or } \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x) \text{ donc } (\ln(\sqrt{x}))^2 = \frac{1}{4} (\ln(x))^2$$

$$\text{et } 4(g(\sqrt{x}))^2 = f(x).$$

2.b. $g(x) = x \ln(x)$ on a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

$$g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(\sqrt{x}) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 4(g(\sqrt{x}))^2 = 0.$$

On obtient : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$$3.a. u(x) = x \quad u'(x) = 1 \quad v(x) = (\ln(x))^2 \quad v'(x) = 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \ln(x)$$

$$f'(x) = 1 \times (\ln(x))^2 + x \times \frac{2}{x} \ln(x) = (\ln(x))^2 + 2 \ln(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2).$$

$$3.b. \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ et } \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

$$\ln(x) + 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-2}$$

$$\ln(x) + 2 > 0 \Leftrightarrow e^{-2} < x$$

On donne les variations de la fonction f sous la forme d'un tableau

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
lnx	-	0	+	+
lnx+2	-	0	+	+
f'(x)	+	0	-	+
f(x)	0	$4e^{-2}$	0	$+\infty$

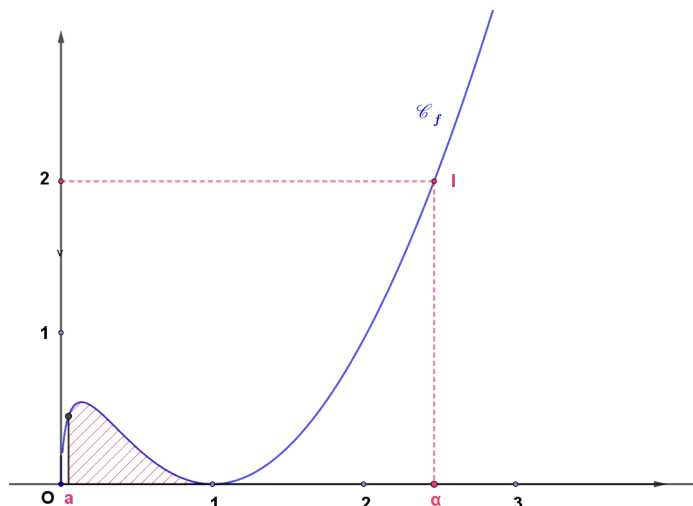
3.c. Le maximum de f sur $]0; 1]$ est : $f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2 = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2}$

4.a. $f(e^{-2}) = 4e^{-2} \simeq 0,54$ donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0; 1]$.
 f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$ à valeurs $[0; +\infty[$, $2 \in [0; +\infty[$
 le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α appartenant à $[1; +\infty[$.

L'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

4.b. En utilisant la calculatrice on obtient $f(2,4) \simeq 1,84$ et $f(2,5) \simeq 2,10$ donc $2,4 < \alpha < 2,5$

5.a



f est positive ou nulle sur $]0;1]$ et $a \in]0;1]$ donc $\int_a^1 f(x) dx$ est l'aire en unité d'aire de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$ (partie hachurée en rouge sur la figure).

5.b. On considère : $\int_a^1 f(x) dx = \int_a^1 x(\ln(x))^2 dx$

On effectue une intégration par parties :

$$u(x) = (\ln(x))^2 \quad u'(x) = 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \ln(x)$$

$$v'(x) = x \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^1 x(\ln(x))^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln(x))^2 \right]_a^1 - \int_a^1 x \ln(x) dx$$

$$\int_a^1 x(\ln(x))^2 dx = -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 - \int_a^1 x \ln(x) dx$$

5.c. $\int_a^1 x \ln(x) dx$

On effectue une nouvelle intégration par parties

$$u_1(x) = \ln(x) \quad u_1'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v_1'(x) = x \quad v_1(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_a^1 x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{2} dx = -\frac{a^2}{2} \ln(a) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_a^1 = -\frac{a^2}{2} \ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\int_a^1 x(\ln(x))^2 dx = -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 + \frac{a^2}{2} \ln(a) + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

5.d. $\lim_{a \rightarrow 0} a \ln(a) = 0$ donc $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 = 0$ et $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{2} \ln(a) = 0$

D'autre part $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{4} = 0$.

Donc $\int_a^1 f(x) dx$ admet $\frac{1}{4}$ pour limite lorsque a tend vers 0.