

Exercice 1

5 points

Partie 1

L'agence de sûreté nucléaire ASNR contrôle les installations des centrales nucléaires afin de garantir leur sécurité et leur conformité. La fréquence des contrôles dépend de l'état du réacteur.

On considère que dans le parc nucléaire français :

- 20 % des réacteurs sont en arrêt pour maintenance ;
- 5 % des réacteurs fonctionnent au ralenti ;
- le reste des réacteurs du parc nucléaire est en état de fonctionnement normal.

On considère également que parmi les réacteurs en arrêt, 85 % sont contrôlés et que parmi les réacteurs fonctionnant au ralenti, 60 % sont contrôlés.

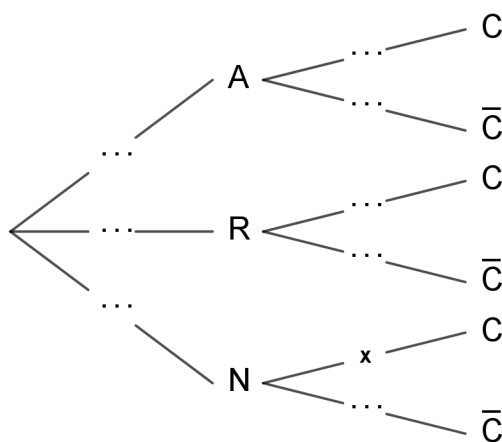
On choisit au hasard un réacteur dans le parc nucléaire français, et on note :

- A l'évènement « Le réacteur est en arrêt » ;
- R l'évènement « Le réacteur fonctionne au ralenti » ;
- N l'évènement « Le réacteur fonctionne normalement » ;
- C l'évènement « Le réacteur subit un contrôle ».

Pour un évènement quelconque E, on désigne par $\bar{E}$ son évènement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

On note x la probabilité que le réacteur subisse un contrôle sachant qu'il fonctionne normalement, c'est-à-dire $x = P_N(C)$.

1. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous en complétant les pointillés à l'aide des données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité que le réacteur soit en arrêt et qu'il subisse un contrôle.

On sait de plus que la probabilité qu'un réacteur du parc nucléaire soit contrôlé est égale à 0,35.

3. Montrer que la probabilité x est égale à 0,2.
4. Le réacteur choisi subit un contrôle. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne normalement.

Partie B

Dans le sud de la France, on compte 12 réacteurs nucléaires qu'on numérote de 1 à 12.

On sait que lorsque le réacteur fonctionne normalement, sa production journalière est égale à 16GWh (gigawattheure), lorsque le réacteur fonctionne au ralenti, sa production journalière est réduite à 10 GWh et enfin lorsque le réacteur est à l'arrêt, sa production journalière est nulle.

On rappelle que $P(N) = 0,75$, $P(R) = 0,05$ et $P(A) = 0,20$.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui modélise la production journalière en GWh d'un réacteur.
- 1.a. Recopier le tableau ci-dessous et compléter les pointillés donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X . On notera k les valeurs prises par la variable aléatoire X et p_k les probabilités égales à $P(X=k)$.

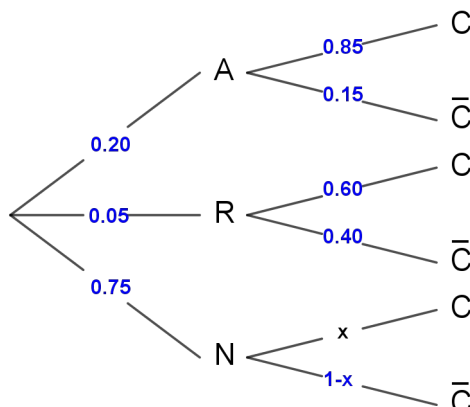
k	0	...	...
p_k	0.20	...	...

- 1.b. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 12,5 et que sa variance $V(X)$ est égale à 40,75.
2. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 12, on note X_i la variable aléatoire qui modélise la production journalière en GWh du $i^{\text{ème}}$ réacteur.
- Ainsi, par exemple, X_2 désigne la variable aléatoire qui modélise la production journalière du 2^{ème} réacteur.
- On suppose que les variables $X_1, X_2, \dots, X_{12}$ suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire X , et qu'elles sont indépendantes.
- On considère la variable aléatoire S qui donne la production totale journalière des 12 réacteurs.
- On a ainsi $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{12}$.
- On note $E(S)$ l'espérance de la variable aléatoire S et $V(S)$ sa variance.
- 2.a. Montrer que $E(S) = 150$ et $V(S) = 489$.
- 2.b. Afin d'éviter le risque de surcharge du réseau et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité la production totale journalière des 12 réacteurs doit être comprise strictement entre 100GWh et 200GWh.
- Peut-on affirmer que la probabilité d'éviter le risque de surcharge et couvrir l'ensemble des besoins en électricité est supérieure à 0,80 ? Justifier.

CORRECTION

Partie A

1. En utilisant les données de l'énoncé :



2. $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,2 \times 0,85 = 0,17$

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(R \cap C) + P(N \cap C) = 0,17 + 0,05 \times 0,60 + 0,75x = 0,17 + 0,03 + 0,75x = 0,20 + 0,75x$$

On sait que $P(C) = 0,35$ donc $0,20 + 0,75x = 0,35 \Leftrightarrow 0,75x = 0,15 \Leftrightarrow x = \frac{0,15}{0,75} = 0,2$

4. On nous demande de calculer : $P_c(N)$.

$$P_c(N) = \frac{P(N \cap C)}{P(C)} = \frac{0,75 \times 0,2}{0,35} = \frac{0,15}{0,35} = \frac{3}{7} \approx 0,429$$

Partie B

1.a. On donne le tableau complété :

k	0	10	16
p_k	0.20	0.05	0.75

1.b. $E(X) = 0 \times 0,2 + 10 \times 0,05 + 16 \times 0,75 = 0,5 + 12 = 12,5$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0^2 \times 0,2 + 10^2 \times 0,05 + 16^2 \times 0,75 - 12,5^2 = 100 \times 0,05 + 256 \times 0,75 - 156,25$$

$$V(X) = 5 + 192 - 156,25 = 40,75$$

2.a. $X_1, X_2, \dots, X_{12}$ ont la même de probabilité que X donc :

• $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_{12}) = E(X) = 12,5$

• $V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_{12}) = V(X) = 40,75$

On obtient :

• $E(S) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_{12}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{12}) = 12 E(X)$

$$E(S) = 12 \times 12,5 = 150$$

• $V(S) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_{12}) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_{12}) = 12 V(X)$

car les 12 variables aléatoires sont indépendantes.

$$V(S) = 12 \times 40,75 = 489$$

2.b. $100 < S < 200 \Leftrightarrow 100 - 150 < S - 150 < 200 - 150 \Leftrightarrow -50 < S - E(S) < 50 \Leftrightarrow |S - E(S)| < 50$

L'évènement contraire est : $|S - E(S)| \geq 50$.

On considère l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si $t > 0$ alors $P(|S - E(S)| \geq t) \leq \frac{V(S)}{t^2}$

Pour $t = 50$:

$$P(|S - E(S)| \geq 50) \leq \frac{489}{2500} = 0,1956$$

$$- P(|S - E(S)| \leq 50) \geq 0,8044$$

$$P(|S - E(S)| < 50) = 1 - P(|S - E(S)| \geq 50) \geq 1 - 0,1956 = 0,8044$$

On peut donc affirmer que la probabilité d'éviter le risque de surcharge et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité est supérieure à 0,80.