

Exercice 2

6 points

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

La notice du médicament indique que :

- le traitement doit durer au moins 7h ;
 - lorsque sa quantité, en mg, présente dans le sang est supérieure ou égale à 3 mg, il y a un risque de toxicité.
- On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans le sang au cours du temps sachant que le patient reçoit une première dose de 1 mg.

Deux protocoles sont étudiées dans les deux parties qui sont indépendantes.

Partie A : étude du premier protocole

Après l'injection de la première dose, une quantité supplémentaire de médicament est administré régulièrement et de façon continue à un patient mis sous perfusion.

Dans cette partie, on modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient par une fonction q définie sur $[0; +\infty[$, où $q(t)$ désigne, en mg, de médicament présente dans le sang du patient, et t représente le temps, en heure, écoulé depuis l'injection initiale. On a ainsi $q(0)=1$.

On admet que :

- la fonction q est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note q' sa fonction dérivée ;
- la fonction q est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{3}{10}y + 1$ où y est une fonction de la variable réelle t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Donner les solutions sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).
2. Montrer que pour tout réel t appartenant à $[0; +\infty[$, $q(t) = \frac{10}{3} - \frac{7}{3}e^{-\frac{3}{10}t}$.
3. Déterminer la limite de la fonction q en $+\infty$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. Étudier les variations de la fonction q sur $[0; +\infty[$.
5. Déterminer, en résolvant une inéquation, au bout de combien de temps après l'injection initiale le médicament présente un risque pour le patient. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1} .
6. D'après ce modèle, le protocole présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : étude du second protocole.

On injecte au patient une première dose de médicament de 1 mg. On admet que la quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures. Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de 0,75 mg de médicament toutes les heures.

On modélise la situation par une suite (u_n) , où pour tout entier naturel n , u_n représente la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient au bout de n heures écoulées depuis l'injection initiale.

Sous ces conditions, on a $u_0=1$.

1. Justifier que pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 0,75$.
- 2.a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
- 2.b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 2.c. Déterminer la limite L de suite (u_n) .
- 2.d. D'après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 2,5$.
- 3.a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
- 3.b. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,7^n$.
4. D'après ce modèle, au bout de combien d'injections supplémentaires la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépasse-t-elle 2,4 mg ?

CORRECTION

Partie A

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b sont des réels et non nul) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(t) = k e^{at} - \frac{b}{a}$ avec k constante réelle.

Pour (E) $a = -\frac{3}{10}$ et $b = 1$ donc $-\frac{b}{a} = \frac{10}{3}$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions f_k définies sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = k e^{-\frac{3}{10}t} + \frac{10}{3}$ avec k constante réelle.

2. On sait que $q(0) = 1$.

$$f_k(0) = k + \frac{10}{3} \Leftrightarrow k = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3} \quad \text{et} \quad q(t) = -\frac{7}{3} e^{-\frac{3}{10}t} + \frac{10}{3}$$

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{3}{10}t = -\infty$ et $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3}{10}t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \frac{10}{3}$.

Dans le contexte de l'exercice, $\frac{10}{3} > 3$ donc pour certaines valeurs de t on aura $q(t) > 3$.

4. $q'(t) = -\frac{3}{10} \left(-\frac{7}{3} e^{-\frac{3}{10}t} \right) = \frac{7}{10} e^{-\frac{3}{10}t} > 0$

donc q est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

5. $q(t) > 3 \Leftrightarrow \frac{10}{3} - \frac{7}{3} e^{-\frac{3}{10}t} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{7}{3} e^{-\frac{3}{10}t} \Leftrightarrow \frac{1}{7} > e^{-\frac{3}{10}t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{7}\right) > -\frac{3}{10}t$

car $\ln$ est strictement croissante $]0; +\infty[$.

$$\Leftrightarrow -\frac{10}{3} \ln\left(\frac{1}{7}\right) < t \quad \text{or} \quad -\frac{10}{3} \ln\left(\frac{1}{7}\right) \approx 6,5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

Au bout de 6h 30min le médicament présente un risque pour le patient.

6. Le traitement doit durer plus de 7h, donc ce protocole présente un risque pour le patient.

Partie B

1. Au début de la $n^{\text{ième}}$ heure après l'injection initiale la quantité de médicament dans le sang du patient est u_n mg.

Pendant la $n^{\text{ième}}$ heure la quantité de médicament diminue de $0,3 u_n$ au début de la $(n+1)^{\text{ième}}$ heure la quantité de médicament est : $u_{n+1} = u_n - 0,3 u_n + 0,75 = 0,7 u_n + 0,75$.

- 2.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Initialisation

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 0,7 u_0 + 0,75 = 0,7 \times 1 + 0,75 = 1,45 \quad \text{donc} \quad u_0 \leq u_1 \leq 4$$

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n , on suppose que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ et on doit démontrer que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

Si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ alors $0,7 \times 0 \leq 0,7 u_n \leq 0,7 u_{n+1} \leq 0,7 \times 4$ soit $0 \leq 0,7 u_n \leq 0,7 u_{n+1} \leq 2,8$ et $0 + 0,75 \leq 0,7 u_n + 0,75 \leq 0,7 u_{n+1} + 0,75 \leq 2,8 + 0,75$ donc $0,75 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3,55$.

En conséquence : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

- 2.b.** Pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
 Pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 4$ donc la suite (u_n) est majorée par 4.
 Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

- 2.c.** On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 0,75$ donc $L = 0,7L + 0,75 \Leftrightarrow 0,3L = 0,75$

$$\Leftrightarrow L = \frac{0,75}{0,3} = 2,5$$

- 2.d.** Pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq L = 2,5 < 3$.

Pour ce modèle le traitement ne présente pas de risque.

- 3.** Pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 2,5 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2,5$.

- 3.a.** Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2,5 = 0,7u_n + 0,75 - 2,5 = 0,7 \times (v_n + 2,5) - 1,75 = 0,7v_n + 0,7 \times 2,5 - 1,75$$

$$v_{n+1} = 0,7v_n$$

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 2,5 = -1,5$.

- 3.b.** Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = -1,5 \times 0,7^n$.

$$\text{Donc } u_n = v_n + 2,5 = 2,5 - 1,5 \times 0,7^n$$

- 4.** $u_n > 2,4 \Leftrightarrow 2,5 - 1,5 \times 0,7^n > 2,4 \Leftrightarrow 0,1 > 1,5 \times 0,7^n \Leftrightarrow \frac{1}{15} > 0,7^n \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{15}\right) > \ln(0,7^n)$

car $\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\Leftrightarrow -\ln(15) > n \times \ln(0,7) \Leftrightarrow -\frac{\ln(15)}{\ln(0,7)} < n$$

car $0 < 0,7 < 1$ donc $\ln(0,7) < 0$

$$-\frac{\ln(15)}{\ln(0,7)} \simeq 7,59 \text{ et } n \text{ est un entier naturel}$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq n$$

u_8 est le premier terme de la suite (u_n) supérieur à 2,4.

La 1^{ère} injection pour u_0 donc il faut 8 injections supplémentaires pour la quantité de médicament dans le sang du patient soit supérieure à 2,4 mg.